

Mathematikaufgaben

> Analysis

> Grenzwerte von Funktionen/L'Hospital-Regel

Aufgabe: Berechne den Grenzwert:

$$\lim_{x \rightarrow 0,5} \frac{\cos(\pi x)}{\ln(2x)}.$$

Lösung: I. Undefinierte Ausdrücke vom Typ „ $\frac{0}{0}$ “ oder „ $\frac{\infty}{\infty}$ “ lassen sich im Rahmen der Analysis nach der Regel von de l'Hospital errechnen vermöge der Identität:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

wobei für zwei differenzierbare Funktionen $f(x)$, $g(x)$ die Bedingung $f(x_0) = g(x_0) = 0$ oder $= \pm\infty$ für $x_0 \in \mathbb{R}$ oder $x_0 = \pm\infty$ gilt. Die Regel von de l'Hospital lässt sich auch auf unbestimmte Ausdrücke vom Typ „ $0 \cdot \infty$ “, „ $\infty - \infty$ “, „ 1^∞ “, „ 0^0 “, „ ∞^0 “ anwenden:

Unbestimmte Ausdrücke	
Typ	Termumformung
$0 \cdot \infty$	$f(x)g(x) = \frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}$
$\infty - \infty$	$\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{g(x)} = \frac{g(x) - f(x)}{f(x)g(x)} = f(x) \left(1 - \frac{g(x)}{f(x)} \right) = \frac{1 - \frac{g(x)}{f(x)}}{\frac{1}{f(x)}}$
$0^0, 1^\infty, \infty^0$	$f(x)^{g(x)} = e^{g(x)\ln f(x)}$

Unbestimmte Ausdrücke

II. Der Grenzwert $\lim_{x \rightarrow 0,5} \frac{\cos(\pi x)}{\ln(2x)}$ ist vom Typ $\frac{0}{0}$, so dass mit den Logarithmengesetzen und der Anwendung der Regel von de l'Hospital folgt:

$$\lim_{x \rightarrow 0,5} \frac{\cos(\pi x)}{\ln(2x)} = \lim_{x \rightarrow 0,5} \frac{\cos(\pi x)}{\ln(2) + \ln(x)} = \lim_{x \rightarrow 0,5} \frac{-\sin(\pi x) \cdot \pi}{\frac{0}{x}} = \frac{-\sin(\frac{1}{2}\pi) \cdot \pi}{\frac{1}{\frac{1}{2}}} = \frac{-1 \cdot \pi}{2} = -\frac{\pi}{2}.$$