Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Analysis
> Grenzwerte von Funktionen/L'Hospital-Regel

Aufgabe: Berechne den Grenzwert:

$$\lim_{x->0}\left(\frac{1}{x\sin(2x)}-\frac{1}{2x\sin x}\right).$$

Lösung: I. Undefinierte Ausdrücke vom Typ „$\frac{0}{0}$" oder „$\frac{\infty}{\infty}$" lassen sich im Rahmen der Analysis nach der Regel von de l'Hospital errechnen vermöge der Identität:

$$\lim_{x->x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x->x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

wobei für zwei differenzierbare Funktionen f(x), g(x) die Bedingung $f(x_0) = g(x_0) = 0$ oder $= \pm\infty$ für $x_0 \varepsilon$ **R** oder $x_0 = \pm\infty$ gilt. Die Regel von de l'Hospital lässt sich auch auf unbestimmte Ausdrücke vom Typ „$0\cdot\infty$", „$\infty - \infty$", „1^∞", „0^0", „∞^0" anwenden:

Unbestimmte Ausdrücke	
Typ	*Termumformung*
$0\cdot\infty$	$f(x)g(x)=\frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}$
$\infty-\infty$	$\frac{1}{f(x)}-\frac{1}{g(x)}=\frac{g(x)-f(x)}{f(x)g(x)}=f(x)\left(1-\frac{g(x)}{f(x)}\right)=\frac{1-\frac{g(x)}{f(x)}}{\frac{1}{f(x)}}$
0^0, 1∞, ∞^0	$f(x)^{g(x)}=e^{g(x)\ln f(x)}$

Unbestimmte Ausdrücke

II. Der Grenzwert $\lim_{x->0}\left(\frac{1}{x\sin(2x)}-\frac{1}{2x\sin x}\right)$ ist vom Typ ∞-∞, so dass mit einigen Umformungen, der Regel für Ableitungen von Produkten aus drei Faktoren und der Anwendung der Regel von de l'Hospital folgt:

$$\lim_{x->0}\left(\frac{1}{x\sin(2x)}-\frac{1}{2x\sin x}\right)=\lim_{x->0}\left(\frac{2\sin x}{2x\sin(2x)\sin x}-\frac{\sin(2x)}{2x\sin(2x)\sin x}\right)=$$

$$\lim_{x->0}\left(\frac{2\sin x.-\sin(2x)}{2x\sin(2x)\sin x}\right)\underset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x->0}\left(\frac{2\cos x-2\cos(2x)}{2\sin(2x)\sin x+2x\cdot 2\cos(2x)\sin x+2x\sin(2x)\cos x}\right)=$$

$$\lim_{x->0}\left(\frac{2\cos x-2\cos(2x)}{2\sin(2x)\sin x+4x\cos(2x)\sin x+2x\sin(2x)\cos x}\right)=\lim_{x->0}\left(\frac{\cos x-\cos(2x)}{\sin(2x)\sin x+2x\cos(2x)\sin x+x\sin(2x)\cos x}\right)\underset{\frac{0}{0}}{=}$$

$$\lim_{x->0}\left(\frac{-\sin x+2\sin(2x)}{2\cos(2x)\sin x+\sin(2x)\cos x+2\cos(2x)\sin x-4x\sin(2x)\sin x+2x\cos(2x)\cos x+\sin(2x)\cos x+2x\cos(2x)\cos x-x\sin(2x)\sin x}\right)=$$

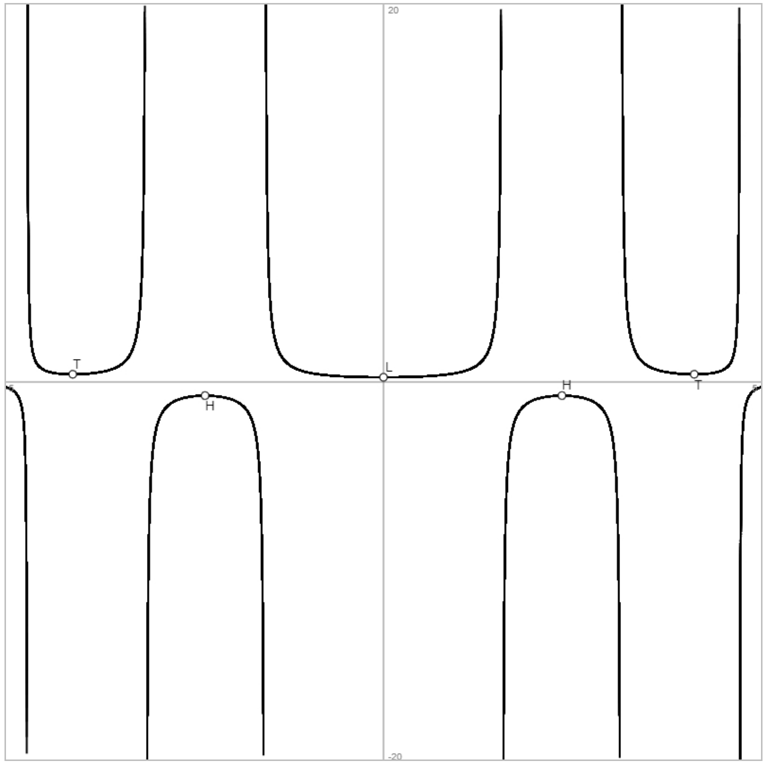
$$\lim_{x->0}\left(\frac{-\sin x+2\sin(2x)}{4\cos(2x)\sin x+2\sin(2x)\cos x-5x\sin(2x)\sin x+4x\cos(2x)\cos x}\right)\underset{\frac{0}{0}}{=}$$

$$\lim_{x->0}\left(\frac{-\cos x+4\cos(2x)}{\begin{array}{r}-4\sin(2x)\sin x+4\cos(2x)\cos x+4\cos(2x)\cos x-2\sin(2x)\sin x\\ -5\sin(2x)\sin x-10x\cos(2x)\sin x-5x\sin(2x)\cos x\\ 4\cos(2x)\cos x-4x\sin(2x)\cos x-4x\cos(2x)\sin x\end{array}}\right)=$$

$$\lim_{x->0}\left(\frac{-\cos x+4\cos(2x)}{-11\sin(2x)\sin x+12\cos(2x)\cos x-14x\cos(2x)\sin x-9x\sin(2x)\cos(x)}\right)=$$

$$\frac{-\cos 0+4\cos 0}{0+12\cdot\cos 0\cdot\cos 0-0-0}=\frac{-1+4}{12}=\frac{3}{12}=\frac{1}{4}=0{,}25.$$

Die Funktion f(x) = $\frac{1}{x\sin(2x)}-\frac{1}{2x\sin x}$ besitzt also an der Stell x = 0 eine stetig hebbare Lücke L(0|0,25) mit Lückenwert 0,25.



www.michael-buhlmann.de / 02.2021 / Aufgabe 1322