

Mathematikaufgaben

> Vektorrechnung

> Geraden

Aufgabe: Wie liegen die zwei Geraden g und h mit:

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

zueinander?

Lösung: I. Allgemein kann hinsichtlich der Lage zwischen zwei Geraden g und h unterschieden werden:

- a) Geraden sind identisch (g=h);
- b) Geraden schneiden sich im Schnittpunkt S ($g \cap h = \{S\}$);
- c) Geraden schneiden sich nicht und sind parallel ($g \parallel h$);
- d) Geraden schneiden sich nicht und sind windschief (g, h windschief).

Dabei gilt folgende Vorgehensweise:

Schritt 1: Schnittpunktberechnung ($g \cap h$): Gleichsetzen der Geradengleichungen von g und h führt zu einem linearen Gleichungssystem mit drei Gleichungen und zwei Unbekannten. Es gilt:

- a) Das Gleichungssystem ist mehrdeutig lösbar; die Geraden sind identisch (g=h).
- b) Das Gleichungssystem ist eindeutig lösbar; die Geraden schneiden sich im Schnittpunkt S.
- c) Das Gleichungssystem ist nicht lösbar; die Geraden schneiden sich nicht; weiter mit Schritt 2.

Schritt 2: Untersuchung der Geraden auf Parallelität ($g \parallel h$): Im Falle der Parallelität ist die Vielfachheit der Richtungsvektoren der Geraden g und h gegeben. Sind die Richtungsvektoren nicht Vielfache voneinander, so sind die Geraden g und h windschief.

II. a) Wir untersuchen auf einen eventuellen Schnittpunkt ($g \cap h$). Gleichsetzen der beiden Geradengleichungen von g und h ergibt das lineare Gleichungssystem mit zwei Unbekannten und drei Gleichungen:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$
$$s \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$-t = -1, -s - t = 0, 2s = 1 \Leftrightarrow$$

$$t = 1, s = 0,5, -1,5 = 0 \quad \text{✗}$$

Aus dem Widerspruch (✗) folgt: Die Geraden g und h schneiden sich nicht.

b) Wir untersuchen auf Parallelität ($g \parallel h$): Für die Richtungsvektoren in den Geradengleichungen muss im Fall der Parallelität für ein gewisses reelles k gelten:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$k=0, k=-1, 0=2$ ✎

Auf Grund des Widerspruchs sind die Geraden also nicht parallel, sondern windschief.

www.michael-buhlmann.de / 02.2015 / Aufgabe 93