

Mathematikaufgaben

> Vektorrechnung

> Geraden

Aufgabe: Wie liegen die zwei Geraden g und h mit:

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ und } h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ -6 \end{pmatrix}$$

zueinander?

Lösung: I. Allgemein kann hinsichtlich der Lage zwischen zwei Geraden g und h unterschieden werden:

- a) Geraden sind identisch ($g=h$);
- b) Geraden schneiden sich im Schnittpunkt S ($g \cap h = \{S\}$);
- c) Geraden schneiden sich nicht und sind parallel ($g \parallel h$);
- d) Geraden schneiden sich nicht und sind windschief (g, h windschief).

Dabei gilt folgende Vorgehensweise:

Schritt 1: Schnittpunktberechnung ($g \cap h$): Gleichsetzen der Geradengleichungen von g und h führt zu einem linearen Gleichungssystem mit drei Gleichungen und zwei Unbekannten. Es gilt:

- a) Das Gleichungssystem ist mehrdeutig lösbar; die Geraden sind identisch ($g=h$).
- b) Das Gleichungssystem ist eindeutig lösbar; die Geraden schneiden sich im Schnittpunkt S.
- c) Das Gleichungssystem ist nicht lösbar; die Geraden schneiden sich nicht; weiter mit Schritt 2.

Schritt 2: Untersuchung der Geraden auf Parallelität ($g \parallel h$): Im Falle der Parallelität ist die Vielfachheit der Richtungsvektoren der Geraden g und h gegeben. Sind die Richtungsvektoren nicht Vielfache voneinander, so sind die Geraden g und h windschief.

II. Gleichsetzen der Geradengleichungen ($g \cap h$) ergibt:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ -6 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$s \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$2s+3t = 2, 2s+3t = 2, 4s+6t = 4 \Leftrightarrow$$

$$2s+3t = 2$$

Das lineare Gleichungssystem ist offensichtlich mehrdeutig lösbar, die Geraden g und h sind somit identisch ($g=h$).