Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Vektorrechnung
> Geraden

Aufgabe: Wie liegen die zwei Geraden g und h mit:

$$g:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und h: } \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

zueinander?

Lösung: I. Allgemein kann hinsichtlich der Lage zwischen zwei Geraden g und h unterschieden werden:

a) Geraden sind identisch (g=h);
b) Geraden schneiden sich im Schnittpunkt S (g∩h = {S});
c) Geraden schneiden sich nicht und sind parallel (g||h);
d) Geraden schneiden sich nicht und sind windschief (g, h windschief).

Dabei gilt folgende Vorgehensweise:

Schritt 1: Schnittpunktberechnung (g∩h): Gleichsetzen der Geradengleichungen von g und h führt zu einem linearen Gleichungssystem mit drei Gleichungen und zwei Unbekannten. Es gilt:
a) Das Gleichungssystem ist mehrdeutig lösbar; die Geraden sind identisch (g=h).
b) Das Gleichungssystem ist eindeutig lösbar; die Geraden schneiden sich im Schnittpunkt S; weiter mit Schritt 3.
c) Das Gleichungssystem ist nicht lösbar; die Geraden schneiden sich nicht; weiter mit Schritt 2.

Schritt 2: Untersuchung der Geraden auf Parallelität (g||h): Im Falle der Parallelität ist die Vielfachheit der Richtungsvektoren der Geraden g und h gegeben; weiter mit Schritt 4. Sind die Richtungsvektoren nicht Vielfache voneinander, so sind die Geraden g und h windschief; weiter mit Schritt 4.

Schritt 3: Im Falle der Existenz eines Schnittpunkts ergibt sich der Schnittwinkel φ zwischen den Geraden g und h vermöge der Formel:

$$\varphi = \cos^{-1}\left(\frac{\left| \vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 \right|}{\left| \vec{u}_1 \right| \cdot \left| \vec{u}_2 \right|} \right)$$

mit den Richtungsvektoren $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ der Geraden g und h.

Schritt 4: Für den Abstand zwischen den zwei Geraden gilt im Falle der Parallelität:

$$d(g,h) = d(P,g)$$

mit der Geraden g und dem Punkt Pεh und mit der Abstandsbestimmung zwischen Punkt und Gerade z.B. nach dem Lotfußpunkt- oder Hilfsebenenverfahren. Im Falle der Windschiefheit zwischen den Geraden g und h ist der Abstand d(g.h) nach dem Lotfußpunktverfahren mit den Lotfußpunkten Gεg und Hεh ($\vec{GH}$ senkrecht zu g und h) zu bestimmen oder nach dem Hilfsebenenverfahren mit der Hilfsebene E_H durch die Gerade g und parallel zur Geraden h sowie:

$$d(g,h) = d(h,E_H) = d(P,E_H)$$

mit Pεh und Hessescher Normalform.

II. a) Gleichsetzen der Geradengleichungen (g∩h) ergibt:

$$\begin{pmatrix}1\\4\\-1\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\2\\-1\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix}\Leftrightarrow$$

$$s\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix}$$

und damit das lineare Gleichungssystem:

<u>Anfangstableau</u>:

s	*t*	| *R.S.*
1	1	| 1
-1	-2	| -2
1	0	| 0

<u>1. Schritt</u>: 1*(*2*) + 1*(*1*) / 1*(*3*) - 1*(*1*) /

1	1	| 1
0	-1	| -1
0	-1	| -1

<u>2. Schritt</u>: 1*(*1*) + 1*(*2*) / -1*(*3*) + 1*(*2*) /

1	0	| 0
0	-1	| -1
0	0	| 0

<u>3. Schritt</u>: (keine Umformung) /

1	0	| 0
0	-1	| -1
0	0	| 0

<u>Teilen</u>: (*2*):(-1) /

1	0	| 0
0	1	| 1
0	0	| 0

<u>Diagonalgestalt des linearen Gleichungssystems</u>:

$+\ 1s = 0$

$+\ 1t = 1$

$0 = 0$

<u>Lösungen des linearen Gleichungssystems</u>:

$s = 0$

$t = 1$

Die Geraden schneiden sich also, der Schnittpunkt S errechnet sich entweder durch Einsetzen von s in die Geradengleichung von g oder von t in die Geradengleichung von h z.B. als:

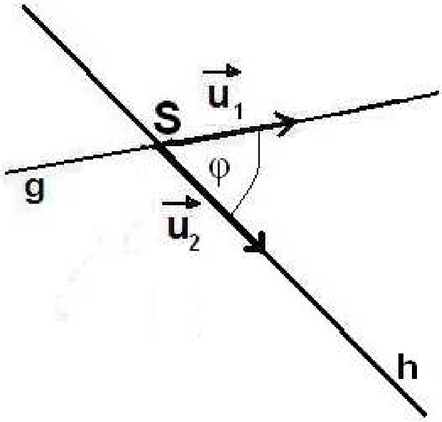
$$\vec{OS}=\begin{pmatrix}1\\4\\-1\end{pmatrix}+0\cdot\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\4\\-1\end{pmatrix}$$, also S(1|4|-1).

b) Für den Schnittwinkel φ der Geraden g und h am Schnittpunkt S(1|4|-1) erhalten wir:

$$\cos\phi=\frac{\left|\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}\right|\left|\begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix}\right|}=\frac{|-1-2+0|}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{5}}=\frac{3}{\sqrt{15}}=0{,}7746$$

und damit:

$\varphi = 39{,}23°$.



www.michael-buhlmann.de / 02.2015 / Aufgabe 96