Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Vektorrechnung
> Geraden

Aufgabe: Wie liegen die zwei Geraden g und h mit:

$$g:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und h: } \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

zueinander?

1. Lösung: I. Allgemein kann hinsichtlich der Lage zwischen zwei Geraden g und h unterschieden werden:

a) Geraden sind identisch (g=h);
b) Geraden schneiden sich im Schnittpunkt S (g∩h = {S});
c) Geraden schneiden sich nicht und sind parallel (g||h);
d) Geraden schneiden sich nicht und sind windschief (g, h windschief).

Dabei gilt folgende Vorgehensweise:

Schritt 1: Schnittpunktberechnung (g∩h): Gleichsetzen der Geradengleichungen von g und h führt zu einem linearen Gleichungssystem mit drei Gleichungen und zwei Unbekannten. Es gilt:
a) Das Gleichungssystem ist mehrdeutig lösbar; die Geraden sind identisch (g=h).
b) Das Gleichungssystem ist eindeutig lösbar; die Geraden schneiden sich im Schnittpunkt S; weiter mit Schritt 3.
c) Das Gleichungssystem ist nicht lösbar; die Geraden schneiden sich nicht; weiter mit Schritt 2.

Schritt 2: Untersuchung der Geraden auf Parallelität (g||h): Im Falle der Parallelität ist die Vielfachheit der Richtungsvektoren der Geraden g und h gegeben; weiter mit Schritt 4. Sind die Richtungsvektoren nicht Vielfache voneinander, so sind die Geraden g und h windschief; weiter mit Schritt 4.

Schritt 3: Im Falle der Existenz eines Schnittpunkts ergibt sich der Schnittwinkel φ zwischen den Geraden g und h vermöge der Formel:

$$\varphi = \cos^{-1}\left(\frac{\left| \vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 \right|}{\left| \vec{u}_1 \right| \cdot \left| \vec{u}_2 \right|} \right)$$

mit den Richtungsvektoren $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ der Geraden g und h.

Schritt 4: Für den Abstand zwischen den zwei Geraden gilt im Falle der Parallelität:

d(g,h) = d(P,g)

mit der Geraden g und dem Punkt Pεh und mit der Abstandsbestimmung zwischen Punkt und Gerade z.B. nach dem Lotfußpunkt- oder Hilfsebenenverfahren. Im Falle der Windschiefheit zwischen den Geraden g und h ist der Abstand d(g.h) nach dem Lotfußpunktverfahren mit den Lotfußpunkten Gεg und Hεh ($\vec{GH}$ senkrecht zu g und h) zu bestimmen oder nach dem Hilfsebenenverfahren mit der Hilfsebene E_H durch die Gerade g und parallel zur Geraden h sowie:

d(g,h) = d(h,E_H) = d(P,E_H)

mit Pεh und Hessescher Normalform.

II. a) Gleichsetzen der Geradengleichungen (g∩h) ergibt:

$$\begin{pmatrix}8\\0\\0\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\-4\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}\Leftrightarrow$$

$$s\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-8\\0\\-4\end{pmatrix}$$

und damit: s=-8, -s-t=0, t=-4, was wegen -(-8)-(-4) = 12 ≠ 0 zu einem Widerspruch führt. Die Geraden g und h schneiden sich mithin nicht.

b) Wir untersuchen auf <u>Parallelität</u> (g||h): Für die Richtungsvektoren in den Geradengleichungen muss im Fall der Parallelität für ein gewisses reelles k gelten:

$$\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}=k\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}\Leftrightarrow$$

0=1, k=-1, k=0 ↯

Auf Grund des Widerspruchs sind die Geraden also nicht parallel, sondern windschief.

c) Um den <u>Abstand</u> zwischen den windschiefen Geraden g und h zu bestimmen, wenden wir das Hilfsebenenverfahren zusammen mit der Hesseschen Normalenform an. Für die Hilfsebene E_H in der Koordinatenform benötigen wir den zu den Richtungsvektoren der Geraden senkrecht stehenden Normalenvektor. Für den Normalenvektor $\vec{n}=\begin{pmatrix}n_1\\n_2\\n_3\end{pmatrix}$ muss gelten:

$\begin{pmatrix}n_1\\n_2\\n_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}=0\Leftrightarrow$ $n_1 - n_2 = 0$ sowie: $\begin{pmatrix}n_1\\n_2\\n_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}=0\Leftrightarrow$ $n_2 - n_3 = 0$,

also: $n_1 = n_2$, $n_3 = n_2$. Mit $n_2 = 1$ ergibt sich: $n_1 = n_2 = n_3 = 1$ und damit der Normalenvektor $\vec{n}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$.

Die Hilfsebene durch die Gerade g hat dann die Normalenform:

E_H: $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\left(\vec{x}-\begin{pmatrix}8\\0\\0\end{pmatrix}\right)=0$.

Mit der Hesseschen Normalenform ergibt sich der Abstand der beiden Geraden g und h als Abstand zwischen dem (Stützvektor der Geraden h als) Punkt P(0|0|-4)εh und der Hilfsebene E_H, also:

$$d(g,h)=\frac{\left|\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\left(\begin{pmatrix}0\\0\\-4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}8\\0\\0\end{pmatrix}\right)\right|}{\left|\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right|}=\frac{\left|\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-8\\0\\-4\end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right|}=\frac{|-8+0-4|}{\sqrt{3}}=\frac{12}{\sqrt{3}}=4\sqrt{3}.$$

2. Lösung: I. Allgemein kann hinsichtlich der Lage zwischen zwei Geraden g und h unterschieden werden:

a) Geraden sind identisch (g=h);
b) Geraden schneiden sich im Schnittpunkt S (g∩h = {S});
c) Geraden schneiden sich nicht und sind parallel (g||h);
d) Geraden schneiden sich nicht und sind windschief (g, h windschief).

Dabei gilt folgende Vorgehensweise:

Schritt 1: Schnittpunktberechnung (g∩h): Gleichsetzen der Geradengleichungen von g und h führt zu einem linearen Gleichungssystem mit drei Gleichungen und zwei Unbekannten. Es gilt:
a) Das Gleichungssystem ist mehrdeutig lösbar; die Geraden sind identisch (g=h).
b) Das Gleichungssystem ist eindeutig lösbar; die Geraden schneiden sich im Schnittpunkt S; weiter mit Schritt 3.
c) Das Gleichungssystem ist nicht lösbar; die Geraden schneiden sich nicht; weiter mit Schritt 2.

Schritt 2: Untersuchung der Geraden auf Parallelität (g||h): Im Falle der Parallelität ist die Vielfachheit der Richtungsvektoren der Geraden g und h gegeben; weiter mit Schritt 4. Sind die Richtungsvektoren nicht Vielfache voneinander, so sind die Geraden g und h windschief; weiter mit Schritt 4.

Schritt 3: Im Falle der Existenz eines Schnittpunkts ergibt sich der Schnittwinkel φ zwischen den Geraden g und h vermöge der Formel:

$$\varphi = \cos^{-1}\left(\frac{\left|\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2\right|}{\left|\vec{u}_1\right| \cdot \left|\vec{u}_2\right|}\right)$$

mit den Richtungsvektoren $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ der Geraden g und h.

Schritt 4: Für den Abstand zwischen den zwei Geraden gilt im Falle der Parallelität:

d(g,h) = d(P,g)

mit der Geraden g und dem Punkt Pεh und mit der Abstandsbestimmung zwischen Punkt und Gerade z.B. nach dem Lotfußpunkt- oder Hilfsebenenverfahren. Im Falle der Windschiefheit zwischen den Geraden g und h ist der Abstand d(g.h) nach dem Lotfußpunktverfahren mit den Lotfußpunkten Gεg und Hεh ($\vec{GH}$ senkrecht zu g und h) zu bestimmen oder nach dem Hilfsebenenverfahren mit der Hilfsebene E_H durch die Gerade g und parallel zur Geraden h sowie:

d(g,h) = d(h,E_H) = d(P,E_H)

mit Pεh und Hessescher Normalform.

II. a) Gleichsetzen der Geradengleichungen (g∩h) ergibt:

$$\begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$s\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$$

und damit: s=-8, -s-t=0, t=-4, was wegen -(-8)-(-4) = 12 ≠ 0 zu einem Widerspruch führt. Die Geraden g und h schneiden sich mithin nicht.

b) Wir untersuchen auf Parallelität (g||h): Für die Richtungsvektoren in den Geradengleichungen muss im Fall der Parallelität für ein gewisses reelles k gelten:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = k\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

0=1, k=-1, k=0 ↯

Auf Grund des Widerspruchs sind die Geraden also nicht parallel, sondern windschief.

c) Um den Abstand zwischen den windschiefen Geraden g und h zu bestimmen, wenden wir das Hilfsebenenverfahren zusammen mit der Hesseschen Normalenform an. Für die Hilfsebene E_H in der Koordinatenform benötigen wir den zu den Richtungsvektoren der Geraden senkrecht stehenden Normalenvektor. Der Normalenvektor ist das Kreuzprodukt der Richtungsvektoren:

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1)\cdot(-1)-0 \\ 0-1\cdot(-1) \\ 1\cdot 1-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Die Hilfsebene durch die Gerade g hat dann die Normalenform:

$$E_H: \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\left(\vec{x} - \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = 0,$$

woraus die Koordinatengleichung

E_H: $x_1 + x_2 + x_3 = 8$

folgt. Mit der Hesseschen Normalenform ergibt sich der Abstand der beiden Geraden g und h als Abstand zwischen dem (Stützvektor der Geraden h als) Punkt P(0|0|-4)εh und der Hilfsebene E_H, also:

$$d(g,h) = \frac{|0+0+(-4)-8|}{\left|\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right|} = \frac{|-12|}{\sqrt{3}} = \frac{12}{\sqrt{3}} = 4\sqrt{3}.$$

3. Lösung: I. Allgemein kann hinsichtlich der Lage zwischen zwei Geraden g und h unterschieden werden:

a) Geraden sind identisch (g=h);
b) Geraden schneiden sich im Schnittpunkt S (g∩h = {S});
c) Geraden schneiden sich nicht und sind parallel (g||h);
d) Geraden schneiden sich nicht und sind windschief (g, h windschief).

Dabei gilt folgende Vorgehensweise:

Schritt 1: Schnittpunktberechnung (g∩h): Gleichsetzen der Geradengleichungen von g und h führt zu einem linearen Gleichungssystem mit drei Gleichungen und zwei Unbekannten. Es gilt:
a) Das Gleichungssystem ist mehrdeutig lösbar; die Geraden sind identisch (g=h).
b) Das Gleichungssystem ist eindeutig lösbar; die Geraden schneiden sich im Schnittpunkt S; weiter mit Schritt 3.
c) Das Gleichungssystem ist nicht lösbar; die Geraden schneiden sich nicht; weiter mit Schritt 2.

Schritt 2: Untersuchung der Geraden auf Parallelität (g||h): Im Falle der Parallelität ist die Vielfachheit der Richtungsvektoren der Geraden g und h gegeben; weiter mit Schritt 4. Sind die Richtungsvektoren nicht Vielfache voneinander, so sind die Geraden g und h windschief; weiter mit Schritt 4.

Schritt 3: Im Falle der Existenz eines Schnittpunkts ergibt sich der Schnittwinkel φ zwischen den Geraden g und h vermöge der Formel:

$$\varphi = \cos^{-1}\left(\frac{\left|\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2\right|}{\left|\vec{u}_1\right| \cdot \left|\vec{u}_2\right|}\right)$$

mit den Richtungsvektoren $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ der Geraden g und h.

Schritt 4: Für den Abstand zwischen den zwei Geraden gilt im Falle der Parallelität:

$$d(g,h) = d(P,g)$$

mit der Geraden g und dem Punkt Pεh und mit der Abstandsbestimmung zwischen Punkt und Gerade z.B. nach dem Lotfußpunkt- oder Hilfsebenenverfahren. Im Falle der Windschiefheit zwischen den Geraden g und h ist der Abstand d(g.h) nach dem Lotfußpunktverfahren mit den Lotfußpunkten Gεg und Hεh ($\overrightarrow{GH}$ senkrecht zu g und h) zu bestimmen oder nach dem Hilfsebenenverfahren mit der Hilfsebene E_H durch die Gerade g und parallel zur Geraden h sowie:

$$d(g,h) = d(h,E_H) = d(P,E_H)$$

mit Pεh und Hessescher Normalform.

II. a) Gleichsetzen der Geradengleichungen (g∩h) ergibt:

$$\begin{pmatrix}8\\0\\0\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\-4\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}\Leftrightarrow$$

$$s\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-8\\0\\-4\end{pmatrix}$$

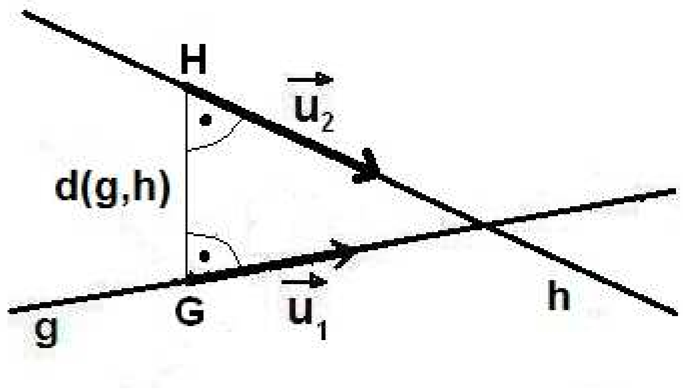
und damit: s=-8, -s-t=0, t=-4, was wegen -(-8)-(-4) = 12 ≠ 0 zu einem Widerspruch führt. Die Geraden g und h schneiden sich mithin nicht.

b) Wir untersuchen auf Parallelität (g||h): Für die Richtungsvektoren in den Geradengleichungen muss im Fall der Parallelität für ein gewisses reelles k gelten:

$$\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}=k\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}\Leftrightarrow$$

0=1, k=-1, k=0 ↯

Auf Grund des Widerspruchs sind die Geraden also nicht parallel, sondern windschief.



c) Um den Abstand zwischen den windschiefen Geraden g und h zu bestimmen, wenden wir das Lotfußpunktverfahren an. Dazu seien G(8+s|-s|0)εg und H(0|t|-4-t)εh, so dass:

$$\overrightarrow{GH}=\begin{pmatrix}0\\t\\-4-t\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}8+s\\-s\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-8-s\\t+s\\-4-t\end{pmatrix}$$

gilt. In den Lotfußpunkten muss der Differenzvektor $\overrightarrow{GH}$ jeweils senkrecht auf den Richtungsvektoren $\overrightarrow{u_1}$, $\overrightarrow{u_2}$ der Geraden g und h stehen. Es ergibt sich damit:

$$\vec{GH}\cdot\vec{u_1} = \begin{pmatrix}-8-s\\ t+s\\ -4-t\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ -1\\ 0\end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

-8-s – (t+s) + 0 = 0 ⇔

-8 – 2s – t = 0 ⇔

t = -8 – 2s (1)

und weiter:

$$\vec{GH}\cdot\vec{u_2} = \begin{pmatrix}-8-s\\ t+s\\ -4-t\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ 1\\ -1\end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

0 + t+s – (-4-t) = 0 ⇔

2t + s + 4 = 0 (2).

Einsetzen von t aus Gleichung (1) in Gleichung (2) führt auf:

2(-8-2s) + s + 4 = 0 ⇔

-16 – 4s + s + 4 = 0 ⇔

-3s = 12 ⇔

s = -4

und weiter:

t = -8 – 2·(-4) = 0.

Die gesuchten Lotfußpunkte lauten mit s=-4 und t=0: G(4|4|0) und H(0|0|-4). Der Abstand zwischen den Lotfußpunkten ist gleichzeitig der Abstand zwischen den windschiefen Geraden, also:

d(g,h) = d(G,H) = $\left|\vec{GH}\right| = \left|\begin{pmatrix}-4\\ -4\\ -4\end{pmatrix}\right| = \sqrt{4^2+4^2+4^2} = \sqrt{3\cdot 4^2} = 4\sqrt{3}$.

www.michael-buhlmann.de / 02.2015 / Aufgabe 97