Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Vektorrechnung
> Geraden

Aufgabe: Die Geraden g und h mit:

$$g:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ und h: } \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

sind zueinander windschief. Bestimme den Abstand zwischen den Geraden.

1. Lösung: I. Allgemein kann hinsichtlich der Lage zwischen zwei Geraden g und h unterschieden werden:

a) Geraden sind identisch (g=h);
b) Geraden schneiden sich im Schnittpunkt S ($g \cap h = \{S\}$);
c) Geraden schneiden sich nicht und sind parallel (g||h);
d) Geraden schneiden sich nicht und sind windschief (g, h windschief).

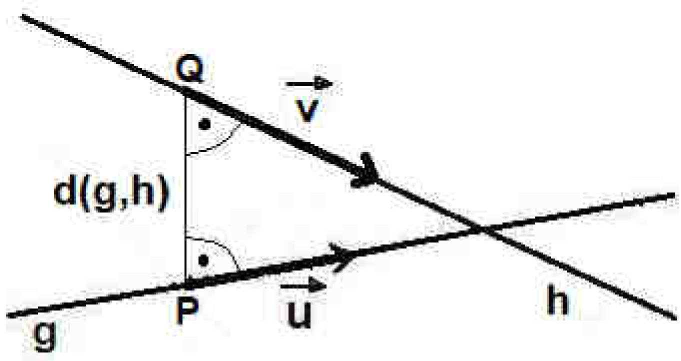
Im Falle der Windschiefheit zwischen den Geraden g und h ist der Abstand d(g.h) nach dem Lotfußpunktverfahren mit den Lotfußpunkten Pεg und Qεh ($\vec{PQ}$ senkrecht zu g und h) zu bestimmen:

$$d(g,h) = d(P,Q) = \left|\vec{PQ}\right|.$$

Dabei werden zu den Geraden

$$g:\ \vec{x} = \vec{a} + r\,\vec{u} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \text{ und h: } \vec{x} = \vec{b} + s\,\vec{v} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

„laufende Geradenpunkte“ $P_r(a_1+ru_1|a_2+ru_2|a_3+ru_3)\varepsilon g$, $Q_s(b_1+sv_1|b_2+sv_2|b_3+sv_3)\varepsilon h$ vorausgesetzt und die Parameter r, s über ein lineares 2x2-Gleichungssystem so bestimmt, dass der Differenzvektor $\vec{P_rQ_s} = \begin{pmatrix} b_1 - a_1 + sv_1 - ru_1 \\ b_2 - a_2 + sv_2 - ru_2 \\ b_3 - a_3 + sv_3 - ru_3 \end{pmatrix}$ senkrecht zu beiden Richtungsvektoren $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ der Geraden steht.



II. Zu den Geraden g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und h: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ bilden wir die „laufenden Geradenpunkte" $P_r(2+2r|-1+r|-1+2r)\varepsilon g$, $Q_s(4+s|-2|-4+2s)\varepsilon h$ und den dazugehörigen Differenzvektor:

$$\overrightarrow{P_rQ_s} = \begin{pmatrix} 4+s \\ -2 \\ -4+2s \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2+2r \\ -1+r \\ -1+2r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+s-2r \\ -1-r \\ -3+2s-2r \end{pmatrix}.$$

Die geforderte Orthogonalität des Differenzvektors zu den Richtungsvektoren führt auf die Gleichungen (1), (2):

$$\overrightarrow{P_rQ_s} \cdot \vec{u} = \begin{pmatrix} 2+s-2r \\ -1-r \\ -3+2s-2r \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow 2(2+s-2r)+(-1-r)+2(-3+2s-2r) = 0 \Leftrightarrow 4+2s-4r-1-r-6+4s-4r = 0$$

$\Leftrightarrow$ -3 – 9r +6s = 0 $\Leftrightarrow$ -9r + 6s = 3 $\Leftrightarrow$ -3r + 2s = 1 (1)

$$\overrightarrow{P_rQ_s} \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} 2+s-2r \\ -1-r \\ -3+2s-2r \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow (2+s-2r)+0+2(-3+2s-2r) = 0 \Leftrightarrow 2+s-2r-6+4s-4r = 0$$

$\Leftrightarrow$ -4 – 6r + 5s = 0 $\Leftrightarrow$ -6r + 5s = 4 (2)

und das lineare Gleichungssystem:

Lineares Gleichungssystem:

$-\ 3r + 2s = 1$
$-\ 6r + 5s = 4$

Anfangstableau:

-3 2 | 1
-6 5 | 4

1. Schritt: -1*(*2*) + 2*(*1*) /

-3 2 | 1
0 -1 | -2

Dreiecksgestalt des linearen Gleichungssystems:

$-\ 3r + 2s = 1$
$-\ 1s = -2$

Lösungen des linearen Gleichungssystems:

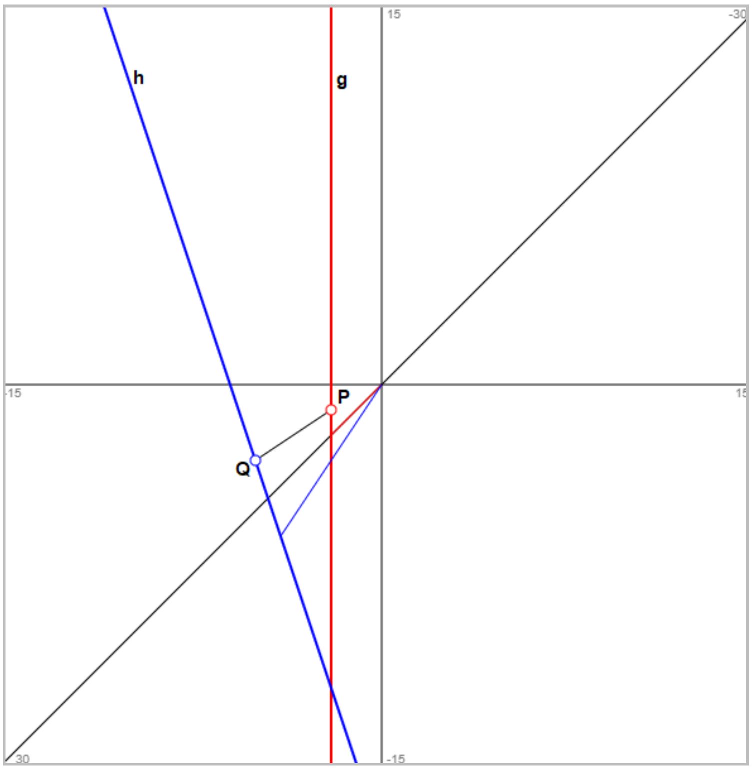
$s = 2$
$r = 1$

Das Einsetzen von r = 1 und s = 2 in $P_r(2+2r|-1+r|-1+2r)\varepsilon g$, $Q_s(4+s|-2|-4+2s)\varepsilon h$ liefert die gesuchten Lotfußpunkte P(4|0|1), Q(6|-2|0).

III. Der Abstand der gefundenen Lotfußpunkte ist der Abstand der windschiefen Geraden g und h. Es gilt damit:

$$d(g,h) = \left|\overrightarrow{PQ}\right| = \left|\begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{2^2 + (-2)^2 + (-1)^2} = \sqrt{4+4+1} = \sqrt{9} = 3 \text{ LE.}$$

Die windschiefen Geraden g und h haben damit einen Abstand von 3 LE.



2. Lösung: I. Allgemein kann hinsichtlich der Lage zwischen zwei Geraden g und h unterschieden werden:

a) Geraden sind identisch (g=h);
b) Geraden schneiden sich im Schnittpunkt S ($g \cap h = \{S\}$);
c) Geraden schneiden sich nicht und sind parallel (g||h);
d) Geraden schneiden sich nicht und sind windschief (g, h windschief).

Im Falle der Windschiefheit zwischen den Geraden g und h ist der Abstand d(g.h) nach dem Hilfsebenenverfahren mit der Hilfsebene E_H durch die Gerade g und parallel zur Geraden h sowie:

$$d(g,h) = d(h,E_H) = d(P,E_H)$$

mit Pεh und Hessescher Normalform. Damit ergeben sich mit den Geraden

$$g:\ \vec{x} = \vec{a} + r\,\vec{u} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \text{ und } h:\ \vec{x} = \vec{b} + s\,\vec{v} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

der Normalenvektor (der Hilfsebene) $\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v}$ und die Abstandsformel für windschiefe Geraden:

$$d(g,h) = \frac{\left|\vec{n} \cdot (\vec{b} - \vec{a})\right|}{\left|\vec{n}\right|} = \frac{\left|(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot (\vec{b} - \vec{a})\right|}{\left|\vec{u} \times \vec{v}\right|}.$$

II. Die Wir wenden die Abstandsformel an und berechnen zunächst den Normalenvektor mit Hilfe des Kreuzprodukts der Richtungsvektoren $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ der Geraden g und h:

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 2 - 2\cdot 0 \\ 2\cdot 1 - 2\cdot 2 \\ 2\cdot 0 - 1\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Der gesuchte Abstand zwischen den windschiefen Geraden g und h ist dann mit den Stützvektoren $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}$ der Geraden:

$$d(g,h) = \frac{\left|\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}\right]\right|}{\left|\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}\right|} = \frac{\left|\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}\right|} = \frac{|2 \cdot 2 + (-2) \cdot (-1) + (-1) \cdot (-3)|}{\sqrt{2^2 + (-2)^2 + (-1)^2}} = \frac{|9|}{\sqrt{9}} = \frac{9}{3} = 3 \text{ LE.}$$

(LE = Längeneinheiten)