Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Vektorrechnung
> Parallele Geraden

Aufgabe: Für den Punkt P(-2|5|-1) und die Gerade g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ sind drei zur Geraden g parallele Geraden h zu ermitteln, die vom Punkt P den Abstand 5 Längeneinheiten haben.

Lösung: I. Die parallelen Geraden h haben der Einfachheit halber denselben Richtungsvektor wie der der Geraden g, so dass diesbezüglich nichts zu berechnen ist. Es müssen nun noch die passenden Stützvektoren der Geraden h gefunden werden. Diese ergeben sich aus Punkten Q, die einen Abstand von 5 LE zum Punkt P und dies in senkrechter Richtung zum Richtungsvektor der Geraden g. Es ergibt sich damit die nachstehende Vorgehensweise.

II. Die besagten Punkte Q liegen auf einer zur Geraden g senkrechten Ebene E durch den Punkt P. Die Ebene E besitzt folglich den Richtungsvektor der Geraden g als Normalenvektor, also: $\vec{n} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$. Da der Punkt P auf der Ebene liegt, folgt als Ebenengleichung:

E: $5x_1 + 4x_2 = 5\cdot(-2) + 4\cdot5 = -10 + 20 = 10$.

III. Für einen Punkt $Q(q_1|q_2|q_3)$, der vom Punkt P den Abstand 5 LE besitzt, gilt:

$$d(P,Q) = \left|\vec{PQ}\right| = \left|\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} q_1+2 \\ q_2-5 \\ q_3+1 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{(q_1+2)^2 + (q_2-5)^2 + (q_3+1)^2} = 5.$$

IV. Für einen Punkt $Q(q_1|q_2|q_3)$, der vom Punkt P den Abstand 5 LE besitzt und zudem auf der Ebene E liegt, der also auf einem Kreis mit Mittelpunkt P und Radius 5 LE auf der Ebene E liegt, erhalten wir zunächst aus der Ebenengleichung (gemäß II.):

Ebene E -> $5q_1 + 4q_2 = 10 \Leftrightarrow 5q_1 = 10 - 4q_2 \Leftrightarrow q_1 = 2 - 0{,}8q_2$.

Aus der Abstandsbeziehung (gemäß III.) folgt dann:

$$d(P,Q) = 5 \text{ -> } \sqrt{(q_1+2)^2 + (q_2-5)^2 + (q_3+1)^2} = = 5 \Leftrightarrow \sqrt{(2-0{,}8q_2+2)^2 + (q_2-5)^2 + (q_3+1)^2} = 5$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(4-0{,}8q_2)^2 + (q_2-5)^2 + (q_3+1)^2} = 5 \Leftrightarrow (4-0{,}8q_2)^2 + (q_2-5)^2 + (q_3+1)^2 = 25 \Leftrightarrow$$

$$(q_3+1)^2 = 25 - (4-0{,}8q_2)^2 - (q_2-5)^2 \Leftrightarrow (q_3+1)^2 = 25 - (16 - 6{,}4q_2 + 0{,}64q_2^2) - (q_2^2 - 10q_2 + 25)$$

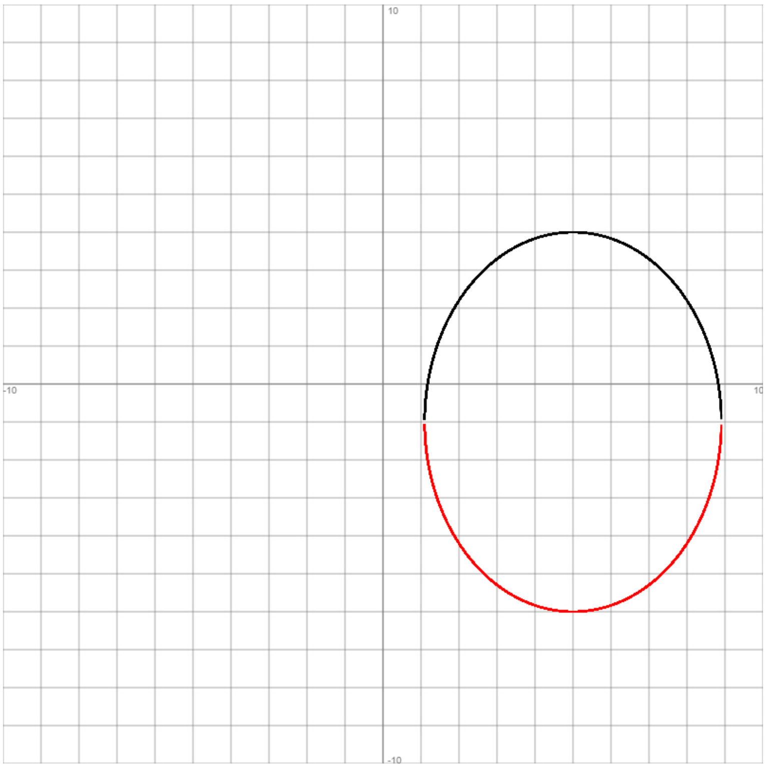
$$\Leftrightarrow (q_3+1)^2 = 25 - 16 + 6{,}4q_2 - 0{,}64q_2^2 - q_2^2 + 10q_2 - 25 \Leftrightarrow (q_3+1)^2 = -1{,}64q_2^2 + 16{,}4q_2 - 16 \Leftrightarrow$$

$$q_3 + 1 = \pm\sqrt{-1{,}64q_2^2 + 16{,}4q_2 - 16} \Leftrightarrow q_3 = -1 \pm \sqrt{-1{,}64q_2^2 + 16{,}4q_2 - 16}.$$

Ein Punkt $Q(q_1|q_2|q_3)$, der vom Punkt P den Abstand 5 LE besitzt und zudem auf der Ebene E liegt, hat also das Aussehen:

$Q(2–0{,}8q_2|q_2|-1 \pm \sqrt{-1{,}64q_2^2 + 16{,}4q_2 - 16})$.

V. Die Beziehung $q_3 = q_3(q_2) = -1 \pm \sqrt{-1{,}64q_2^2 + 16{,}4q_2 - 16}$ stellt eine aus zwei Ästen bestehende Wurzelfunktion, eine Ellipse dar. Der Graph der Funktion verläuft wie folgt:



Aus der zugehörigen Wertetabelle:

q_2	$q_3(q_2)$ (oberer Ast)	$q_3(q_2)$ (unterer Ast)
1.5	1.2159	-3.2159
2	2.2	-4.2
2.5	2.8406	-4.8406
3	3.2942	-5.2942
3.5	3.6163	-5.6163
4	3.8332	-5.8332
4.5	3.9588	-5.9588
5	4	-6
5.5	3.9588	-5.9588
6	3.8332	-5.8332
6.5	3.6163	-5.6163
7	3.2942	-5.2942
7.5	2.8406	-4.8406
8	2.2	-4.2
8.5	1.2159	-3.2159

ergeben sich etwa für q_2 = 2, 5, 8 bei: $q_1 = 2–0{,}8q_2$, $q_3 = -1+\sqrt{-1{,}64q_2^2+16{,}4q_2-16}$ die Punkte: $Q_1(0{,}4|2|2{,}2)$, $Q_2(-2|5|4)$, $Q_3(-4{,}4|8|2{,}2)$.

VI. Die gesuchten parallelen Geraden h zur Geraden g lauten damit:

$$h_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0{,}4 \\ 2 \\ 2{,}2 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix},\ h_2: \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix},\ h_3: \vec{x} = \begin{pmatrix} -4{,}4 \\ 8 \\ 2{,}2 \end{pmatrix} + u\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(LE = Längeneinheiten)

www.michael-buhlmann.de / 09.2023 / Aufgabe 1890