

Mathematikaufgaben

> Vektorrechnung

> Geraden

Aufgabe: Wie liegen die zwei Geraden g und h mit:

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

zueinander?

Lösung: I. Allgemein kann hinsichtlich der Lage zwischen zwei Geraden g und h unterschieden werden:

- a) Geraden sind identisch ($g=h$);
- b) Geraden schneiden sich nicht und sind parallel ($g \parallel h$);
- c) Geraden schneiden sich im Schnittpunkt S ($g \cap h = \{S\}$);
- d) Geraden schneiden sich nicht und sind windschief (g, h windschief).

Für zwei Geraden g und h in Parameterform mit:

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}, \quad h: \vec{x} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

ergibt sich dabei durch Gleichsetzen ein lineares Gleichungssystem (drei Gleichungen; zwei Parameter r, s als Unbekannte) mit dem Anfangstableau:

$$\begin{array}{cc|c} r & s & \\ \hline u_1 & -v_1 & b_1 - a_1 \\ u_2 & -v_2 & b_2 - a_2 \\ u_3 & -v_3 & b_3 - a_3 \end{array},$$

das mit Hilfe des Gauß-Algorithmus in Dreiecksgestalt umgeformt wird. Die auftretenden Arten von Endtableaus haben dann eine der folgenden Gestalten:

a) $\begin{pmatrix} * & (*) & (*) \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$ 2., 3. Zeile als Nullzeilen \Rightarrow Geraden sind identisch: $g = h$

b) $\begin{pmatrix} * & (*) & (*) \\ 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$ 2. Zeile mit Widerspruch, 3. Zeile als Nullzeile \Rightarrow Geraden sind parallel: $g \parallel h$

c) $\begin{pmatrix} * & (*) & (*) \\ 0 & * & (*) \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$ 3. Zeile als Nullzeile \Rightarrow Geraden schneiden sich im Schnittpunkt S: $g \cap h = \{S\}$

$$d) \left(\begin{array}{cc|c} * & (*) & (*) \\ 0 & * & (*) \\ 0 & 0 & * \end{array} \right) \Rightarrow \text{3. Zeile mit Widerspruch} \Rightarrow \text{Geraden sind windschief: } g, h \text{ windschief}$$

(*: reelle Zahl $\neq 0$, (*): reelle Zahl $\neq 0$ oder $= 0$).

II. Gleichsetzen der beiden Geraden g und h:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow r \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix}$$

ergibt das nachstehende lineare Gleichungssystem, das mit dem Gauß-Algorithmus umgeformt wird (Anfangs-, Endtableau):

Lineares Gleichungssystem:

$$+ 3r + 1s = 4$$

$$+ 4r - 1s = 6$$

$$- 1s = -2$$

Anfangstableau:

$$r \quad s \quad | \quad R.S.$$

$$3 \quad 1 \quad | \quad 4$$

$$4 \quad -1 \quad | \quad 6$$

$$0 \quad -1 \quad | \quad -2$$

1. Schritt: $3 \cdot (2) - 4 \cdot (1) /$

$$3 \quad 1 \quad | \quad 4$$

$$0 \quad -7 \quad | \quad 2$$

$$0 \quad -1 \quad | \quad -2$$

2. Schritt: $-7 \cdot (3) + 1 \cdot (2) /$

$$3 \quad 1 \quad | \quad 4$$

$$0 \quad -7 \quad | \quad 2$$

$$0 \quad 0 \quad | \quad 16$$

Endtableau:

$$3 \quad 1 \quad | \quad 4$$

$$0 \quad -7 \quad | \quad 2$$

$$0 \quad 0 \quad | \quad -16$$

Gemäß I. liegt mit dem angezeigten Endtableau des Gauß-Verfahrens der Fall d) vor; die Geraden g und h liegen windschief zueinander.