Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Vektorrechnung
> Geraden

Aufgabe: Konstruiere zur Geraden:

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

eine zu g windschiefe Gerade h, die von g den Abstand 3 hat.

Lösung: I. Allgemein kann hinsichtlich der Lage zwischen zwei Geraden g und h unterschieden werden:

a) Geraden sind identisch (g=h);
b) Geraden schneiden sich nicht und sind parallel (g||h);
c) Geraden schneiden sich im Schnittpunkt S (g∩h = {S});
d) Geraden schneiden sich nicht und sind windschief (g, h windschief).

Für zwei Geraden g und h in Parameterform mit:

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}, \; h: \vec{x} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

ergibt sich dabei durch Gleichsetzen ein lineares Gleichungssystem (drei Gleichungen; zwei Parameter r, s als Unbekannte) mit dem Anfangstableau:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cc} r & s \end{array} \\ \left(\begin{array}{cc|c} u_1 & -v_1 & b_1 - a_1 \\ u_2 & -v_2 & b_2 - a_2 \\ u_3 & -v_3 & b_3 - a_3 \end{array}\right) \end{array},$$

das mit Hilfe des Gauß-Algorithmus in Dreiecksgestalt umgeformt wird. Die auftretenden Arten von Endtableaus haben dann eine der folgenden Gestalten:

a) $\left(\begin{array}{cc|c} * & (*) & (*) \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ => 2., 3. Zeile als Nullzeilen => Geraden sind identisch: g = h

b) $\left(\begin{array}{cc|c} * & (*) & (*) \\ 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ => 2. Zeile mit Widerspruch, 3. Zeile als Nullzeile => Geraden sind parallel: g || h

c) $\left(\begin{array}{cc|c} * & (*) & (*) \\ 0 & * & (*) \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ => 3. Zeile als Nullzeile => Geraden schneiden sich im Schnittpunkt S: g∩h = {S}

d) $\begin{pmatrix} * & (*) & | & (*) \\ 0 & * & | & (*) \\ 0 & 0 & | & * \end{pmatrix}$ => 3. Zeile mit Widerspruch => Geraden sind windschief: g, h windschief

(*: reelle Zahl ≠ 0, (*): reelle Zahl ≠ 0 oder = 0).

II. Für den Abstand zwischen den zwei Geraden gilt im Falle der Parallelität:

$$d(g,h) = d(P,g)$$

mit der Geraden g und dem Punkt Pεh und mit der Abstandsbestimmung zwischen Punkt und Gerade z.B. nach dem Lotfußpunkt- oder Hilfsebenenverfahren. Im Falle der Windschiefheit zwischen den Geraden g und h ist der Abstand d(g.h) nach dem Hilfsebenenverfahren mit der Hilfsebene E_H durch die Gerade g und parallel zur Geraden h sowie:

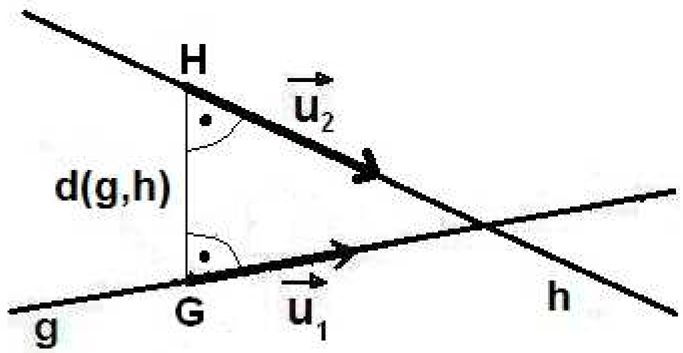
$$d(g,h) = d(h,E_H) = d(P,E_H)$$

mit Pεh und Hessescher Normalform oder gemäß der Formel:

$$d(g,h) = \frac{\left|\vec{n}\left(\vec{b}-\vec{a}\right)\right|}{\left|\vec{n}\right|}$$

bei Geraden g: $\vec{x} = \vec{a} + r\vec{u}$, h: $\vec{x} = \vec{b} + s\vec{v}$ mit $\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v}$.

III. Wir konstruieren die zur Geraden g windschiefe Gerade h mit Geradenabstand d(g,h) = 3, indem wir zwei (Lotfuß-) Punkte G (auf g) und H (auf h) mit Punktabstand d(G,H) = 3 ermitteln gemäß der nachstehenden Abbildung:



Der Differenzvektor $\vec{GH}$ steht dabei senkrecht auf der Geraden g und der zu konstruierenden Geraden h.
Als Punkt G wählen wir den Stützvektor der Geraden g, also: G(2|-1|3). Ein zur Geraden g senkrechter Vektor ($\vec{GH}$ =) $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ hat die Länge 3 wegen:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 2-2+0 = 0, \left|\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{2^2+(-1)^2+2^2} = \sqrt{9} = 3.$$

Den zweiten Punkt H erhalten wir durch Vektoraddition vermöge:

$$\vec{OH} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$$ => H(4|-2|5).

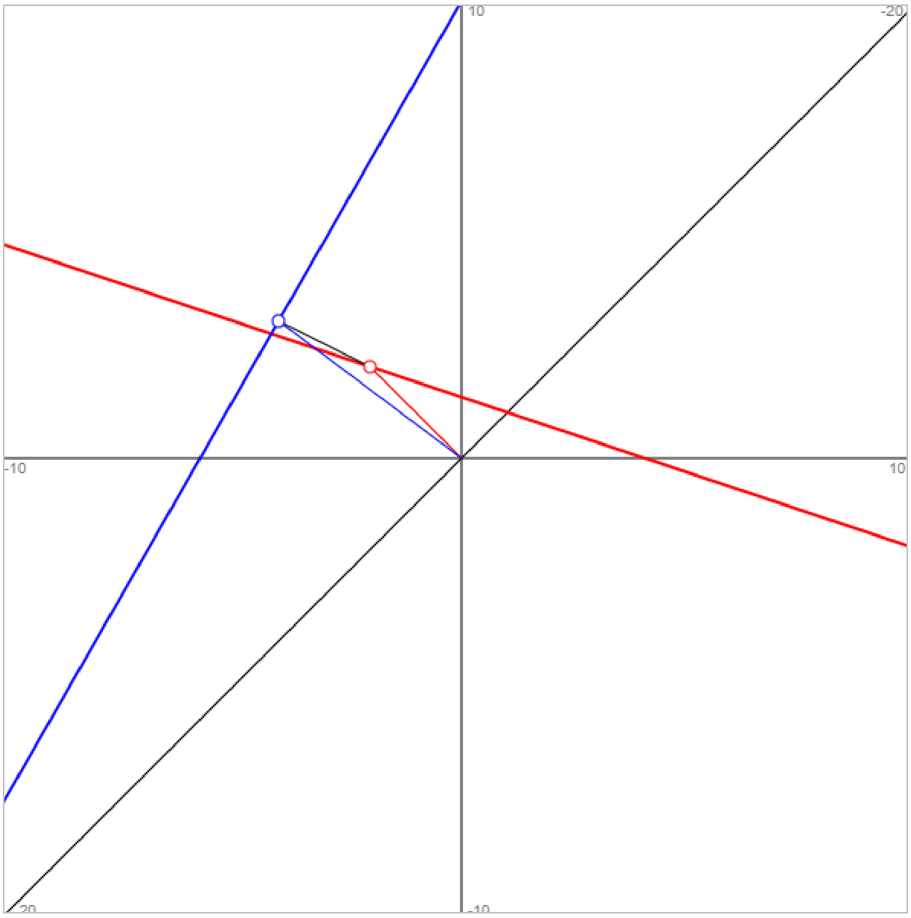
Der Punkt H stellt der Ortsvektor der zu konstruierenden Geraden h dar.

IV. Hinsichtlich des Richtungsvektors $\vec{u_2}$ der gesuchten Geraden h bilden wir das Kreuzprodukt (Vektorprodukt) aus dem Differenzvektor $\vec{GH}$ und dem Richtungsvektor $\vec{u_1}$ der Geraden g:

$$\vec{u_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Der Richtungsvektor $\vec{u_2}$ steht dann senkrecht auf dem Differenzvektor $\vec{GH}$.
Die Gleichung der gesuchten Geraden h lautet damit:

$$\text{h: } \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}.$$



V. Wir führen noch eine Probe bzgl. der Windschiefheit der Geraden g, h und des Abstands zwischen diesen durch. Hinsichtlich der Lage der Geraden im dreidimensionalen Vektorraum ist betrachten wir also die Geradengleichungen:

$$\text{g: } \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ h: } \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

mit den Parametern s, t. Zur Prüfung auf Windschiefheit ergibt das Gleichsetzen der Geradengleichungen (g∩h):

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \Leftrightarrow r\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

und damit das folgende lineare Gleichungssystem mit seiner Lösung nach dem Gauß-Verfahren:

Lineares Gleichungssystem:

$+\ 1r\ +\ 4s\ =\ 2$
$+\ 2r\ -\ 2s\ =\ -1$
$-\ 5s\ =\ 2$

Anfangstableau:

r	s	$R.S.$
1	4	2
2	-2	-1
0	-5	2

1. Schritt: 1*(*2*) - 2*(*1*) /

1	4	2
0	-10	-5
0	-5	2

2. Schritt: 2*(*3*) - 1*(*2*) /

1	4	2
0	-10	-5
0	0	9

Aus dem Endtableau folgt (gemäß I.), dass die Geraden g, h windschief zueinander liegen.

VI. Um den Abstand zwischen den windschiefen Geraden g und h zu bestimmen, wenden wir die Abstandsformel (gemäß II.) an und bilden zunächst das Kreuzprodukt (Vektorprodukt) der beiden Richtungsvektoren der Geraden:

$$\vec{n} = \vec{u}_1 \times \vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Dann errechnet sich mit der Differenz der Stützvektoren $\vec{GH} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ der Abstand als:

$$d(g,h) = \frac{\left| \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right|}{\left| \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right|} = \frac{|4+1+4|}{\sqrt{2^2+(-1)^2+2^2}} = \frac{|9|}{\sqrt{9}} = \frac{9}{3} = 3.$$

Die Gerade h erfüllt also die von ihr geforderten Bedingungen.

www.michael-buhlmann.de / 04.2024 / Aufgabe 2037