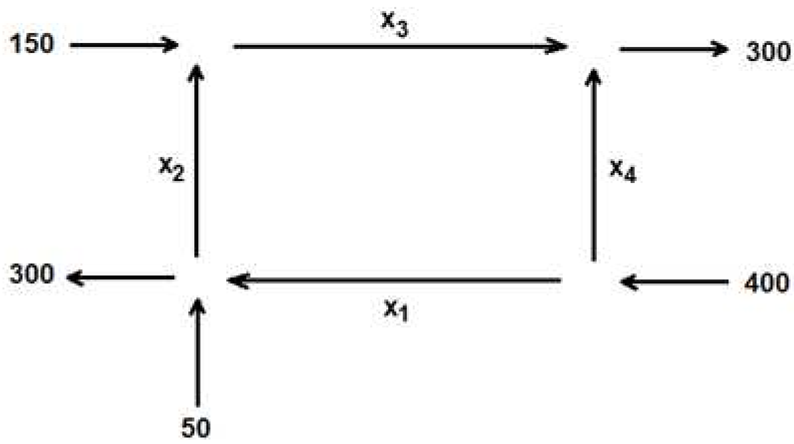
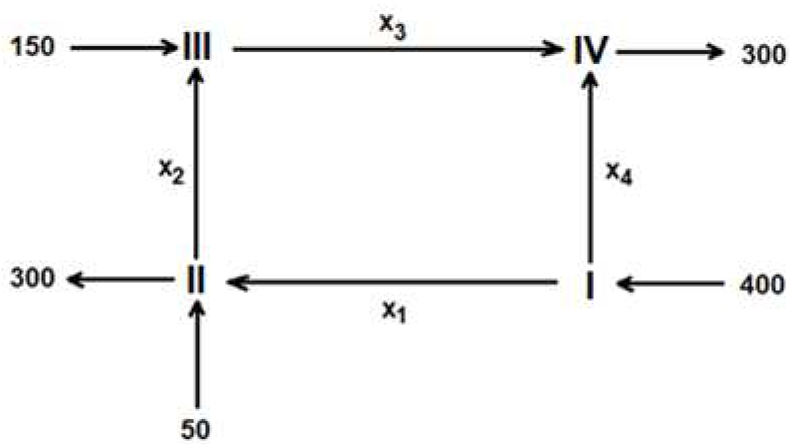
Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Operations Research
> Graphentheorie

Aufgabe: Wassermengen von 600 Kubikmeter (m^3) Volumen werden durch ein Röhrensystem bestehend aus vier Hauptröhren (x_1, x_2, x_3, x_4) geschleust. Berechne mit Hilfe eines linearen Gleichungssystems, wie viel Kubikmeter maximal durch die Hauptröhren fließen kann.



Lösung: I. Der Graph mit den durchfließenden Wassermengen enthält die vier für uns relevanten Knoten I, II, III, IV:



II. In jedem dieser Knoten muss die Menge des hineinfließenden Wasser gleich der des herausfließenden sein; kein Wasser geht verloren. Damit gilt:

Knoten I: $400 = x_1 + x_4$
Knoten II: $x_1 + 50 = x_2 + 300$
Knoten III: $x_2 + 150 = x_3$
Knoten IV: $x_3 + x_4 = 300$

Es ergibt sich damit nach leichten Umformungen in den jeweiligen Gleichungen das folgende lineare Gleichungssystem:

$x_1 + x_4 = 400$
$x_1 – x_2 = 250$
$-x_2 + x_3 = 150$
$x_3 + x_4 = 300$

III. Die Lösung des linearen Gleichungssystems geschieht mit dem Gauß-Algorithmus:

Lineares Gleichungssystem:

$$\begin{array}{rrrrcr} +1x_1 & & & +1x_4 & = & 400 \\ +1x_1 & -1x_2 & & & = & 250 \\ & -1x_2 & +1x_3 & & = & 150 \\ & & +1x_3 & +1x_4 & = & 300 \end{array}$$

Anfangstableau:

x_1	x_2	x_3	x_4	R.S.
1	0	0	1	400
1	-1	0	0	250
0	-1	1	0	150
0	0	1	1	300

1. Schritt: 1*(2) - 1*(1) /

1	0	0	1	400
0	-1	0	-1	-150
0	-1	1	0	150
0	0	1	1	300

2. Schritt: -1*(3) + 1*(2) /

1	0	0	1	400
0	-1	0	-1	-150
0	0	-1	-1	-300
0	0	1	1	300

3. Schritt: 1*(4) + 1*(3) /

1	0	0	1	400
0	-1	0	-1	-150
0	0	-1	-1	-300
0	0	0	0	0

Dreiecksgestalt des linearen Gleichungssystems:

$$\begin{array}{rrrrcr} +1x_1 & & & +1x_4 & = & 400 \\ & -1x_2 & & -1x_4 & = & -150 \\ & & -1x_3 & -1x_4 & = & -300 \\ & & & 0 & = & 0 \end{array}$$

Lösungen des linearen Gleichungssystems:

$x_4 = u$
$x_3 = 300 - 1u$
$x_2 = 150 - 1u$
$x_1 = 400 - 1u$
-> unendlich viele Lösungen des linearen Gleichungssystems; Parameter ist die reelle Zahl u

IV. Wir interpretieren die Lösungen des linearen Gleichungssystems:

$x_1 = 400 – u$
$x_2 = 150 – u$
$x_3 = 300 – u$
$x_4 = u$

und haben mit den durch die Hauptröhren durchströmenden Wassermengen nichtnegativer Größe:

$x_1 = 400 – u \geq 0$
$x_2 = 150 – u \geq 0$
$x_3 = 300 – u \geq 0$
$x_4 = u \geq 0.$

D.h. hinsichtlich des Parameters u:

$u \leq 400$
$u \leq 150$
$u \leq 300$
$u \geq 0$,

so dass $0 \leq u \leq 150$ gelten muss, damit alle durchfließenden Wassermengen nichtnegative Größe haben. Das wiederum bedeutet für die Wassermengen in den vier Hauptröhren:

$x_{1max} = 400 - 0 = 400$, $x_{1min} = 400 - 150 = 250 \Rightarrow 250 \leq x_1 \leq 400$
$x_{2max} = 150 - 0 = 150$, $x_{2min} = 150 - 150 = 0 \Rightarrow 0 \leq x_2 \leq 150$
$x_{3max} = 300 - 0 = 300$, $x_{3min} = 300 - 150 = 150 \Rightarrow 150 \leq x_3 \leq 300$
$x_{4max} = 150$, $x_{4min} = 0 \Rightarrow 0 \leq x_4 \leq 150$.

Mit anderen Worten: Durch die Röhre x_1 können minimal 250 m^3, maximal 400 m^3 durchfließen, durch die Röhre x_2 minimal 0 m^3, maximal 150 m^3, durch die Röhre x_3 minimal 150 m^3, maximal 300 m^3, durch die Röhre x_4 minimal 0 m^3, maximal 150 m^3.

www.michael-buhlmann.de / 12.2020 / Aufgabe 1219