Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben

> Vektorrechnung

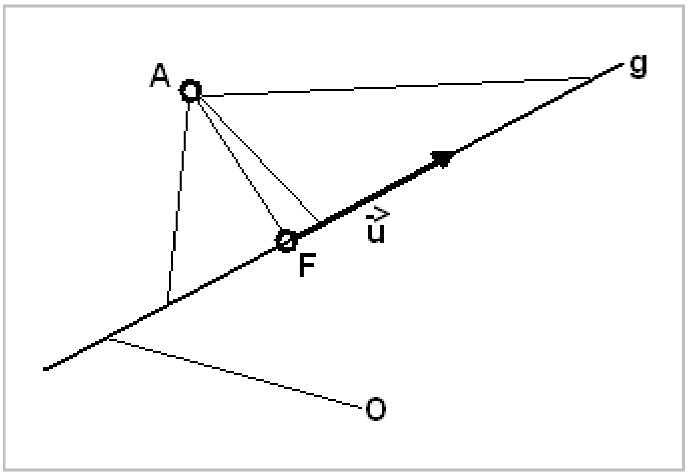
> Geraden/Punkte

Aufgabe: Erläutere eine Vorgehensweise, wie im dreidimensionalen Vektorraum der Punkt auf einer Geraden zu ermitteln ist, der von einem nicht auf der Geraden liegenden Punkt den geringsten Abstand besitzt.

1. Lösung: Die Gerade g sei von der Form: g: $\vec{x} = \vec{b} + t\,\vec{u} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$, der Punkt A habe das Aussehen $A(a_1|a_2|a_3) \notin g$. Bei dem gesuchten Punkt auf der Geraden handelt es sich um den Lotfußpunkt, im Folgenden mit $F\varepsilon g$ bezeichnet. Dann gilt das Lotfußpunktverfahren mit folgender Vorgehensweise:

1) Jeder „laufende Punkt" F_t auf der Geraden g hat die Form $F_t(b_1+tu_1|b_2+tu_2|b_3+tu_3)\varepsilon g$.
2) Der Differenzvektor zwischen den Punkten A und F_t hat das Aussehen:

$$\vec{AF_t} = \begin{pmatrix} b_1+tu_1 \\ b_2+tu_2 \\ b_3+tu_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1+tu_1-a_1 \\ b_2+tu_2-a_2 \\ b_3+tu_3-a_3 \end{pmatrix}.$$



3) Der Lotfußpunkt F auf der Geraden g zum Punkt A kann dann ermittelt werden, wenn der Differenzvektor zwischen den Punkten A und F_t senkrecht auf der Geraden, d.h. auf dem Richtungsvektor der Geraden steht, also mit Hilfe des Skalarprodukts:

$$\vec{AF_t} \cdot \vec{u} = \begin{pmatrix} b_1+tu_1-a_1 \\ b_2+tu_2-a_2 \\ b_3+tu_3-a_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = 0 \quad (*)$$

Das Auflösen des Skalarprodukts in Gleichung (*) ergibt dann:

$u_1(b_1 + tu_1 – a_1) + u_2(b_2 + tu_2 – a_2) + u_3(b_3 + tu_3 – a_3) = 0 \Leftrightarrow$
$t(u_1^2+u_2^2+u_3^2) = u_1(a_1-b_1) + u_2(a_2-b_2) + u_3(a_3-b_3) \Leftrightarrow$
$t_0 = t = [u_1(a_1-b_1) + u_2(a_2-b_2) + u_3(a_3-b_3)]/(u_1^2+u_2^2+u_3^2)$.

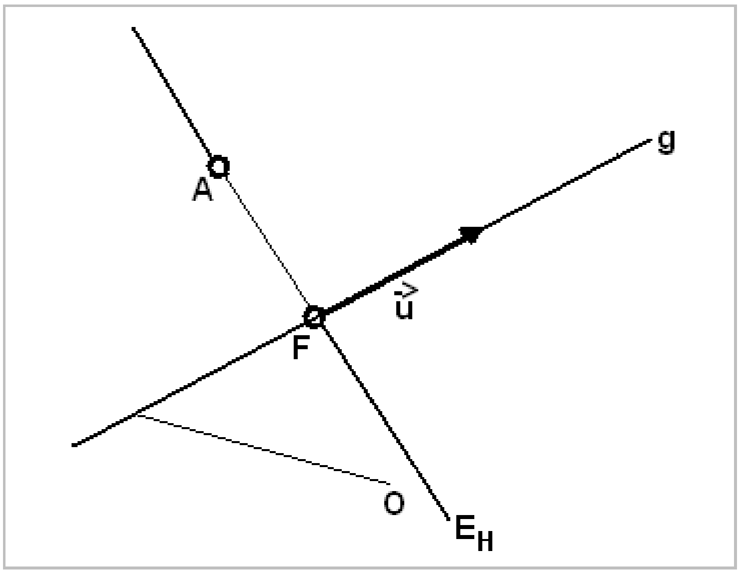
Mit $t = t_0$ ergibt sich der gesuchte Lotfußpunkt $F(b_1+t_0u_1|b_2+t_0u_2|b_3+t_0u_3)$ auf der Geraden g zum

Punkt A gemäß: $\vec{OF} = \vec{b} + t_0 \vec{u} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} + t_0 \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$.

2. Lösung: Die Gerade g sei von der Form: g: $\vec{x} = \vec{b} + t\vec{u} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$, der Punkt A habe das Aussehen $A(a_1|a_2|a_3) \notin g$. Bei dem gesuchten Punkt auf der Geraden handelt es sich um den Lotfußpunkt, im Folgenden mit $F \varepsilon g$ bezeichnet. Dann gilt das Hilfsebenenverfahren mit folgender Vorgehensweise:

1) Mit dem Richtungsvektor der Geraden als Normalenvektor kann eine Hilfsebene E_H durch den Punkt A gebildet werden, die senkrecht auf der Geraden g steht, also:

$$E_H: \vec{u} \cdot \vec{x} = \vec{u} \cdot \vec{OA}.$$



In Koordinatenform lautet die Hilfsebene:

$$E_H: u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 = u_1a_1 + u_2a_2 + u_3a_3 \ (*).$$

2) Zur Ermittlung des Lotfußpunkts F lassen wir die Hilfsebene E_H mit der Geraden g schneiden. Einsetzen der Komponenten $x_1 = b_1 + tu_1$, $x_2 = b_2 + tu_2$, $x_3 = b_3 + tu_3$ der Geraden g in (*) führt auf die Gleichung:

$u_1(b_1 + tu_1) + u_2(b_2 + tu_2) + u_3(b_3 + tu_3) = u_1a_1 + u_2a_2 + u_3a_3 \Leftrightarrow$
$t(u_1^2+u_2^2+u_3^2) = u_1(a_1-b_1) + u_2(a_2-b_2) + u_3(a_3-b_3) \Leftrightarrow$
$t_0 = t = [u_1(a_1-b_1) + u_2(a_2-b_2) + u_3(a_3-b_3)]/(u_1^2+u_2^2+u_3^2)$.

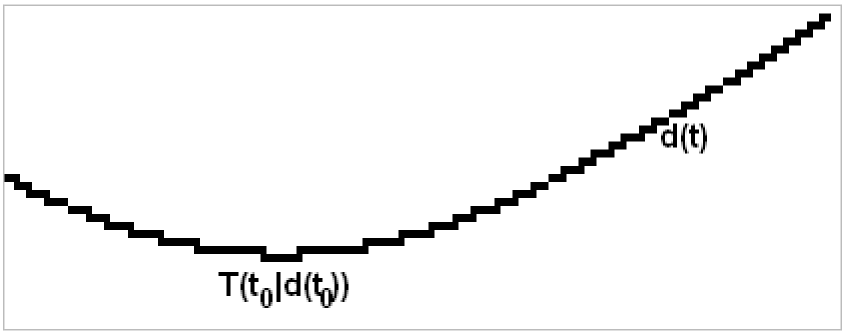
Mit $t = t_0$ ergibt sich der gesuchte Lotfußpunkt $F(b_1+t_0u_1|b_2+t_0u_2|b_3+t_0u_3)$ auf der Geraden g zum Punkt A gemäß: $\vec{OF} = \vec{b} + t_0 \vec{u} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} + t_0 \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$.

3. Lösung: Die Gerade g sei von der Form: g: $\vec{x} = \vec{b} + t\vec{u} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$, der Punkt A habe das Aussehen $A(a_1|a_2|a_3) \notin g$. Bei dem gesuchten Punkt auf der Geraden handelt es sich um den Lotfußpunkt, im Folgenden mit $F \varepsilon g$ bezeichnet. Dann gilt das Verfahren mit einer Abstandsfunktion mit folgender Vorgehensweise:

1) Jeder „laufende Punkt" F_t auf der Geraden g hat die Form $F_t(b_1+tu_1|b_2+tu_2|b_3+tu_3) \varepsilon g$.

2) Der Differenzvektor zwischen den Punkten A und F_t hat das Aussehen:

$$\vec{AF_t} = \begin{pmatrix} b_1 + tu_1 \\ b_2 + tu_2 \\ b_3 + tu_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 + tu_1 - a_1 \\ b_2 + tu_2 - a_2 \\ b_3 + tu_3 - a_3 \end{pmatrix}.$$



3) Der Lotfußpunkt F auf der Geraden g liegt dann vor, wenn die Abstandsfunktion zwischen dem „laufenden Punkt“ F_t der Geraden g und dem Punkt A minimal wird, wenn also die Abstandsfunktion einen Tiefpunkt hat. Die Abstandsfunktion d(t) kann ermittelt werden als:

d(t) = $\left|\vec{AF_t}\right| = \left|\begin{pmatrix} b_1 + tu_1 - a_1 \\ b_2 + tu_2 - a_2 \\ b_3 + tu_3 - a_3 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{(b_1 + tu_1 - a_1)^2 + (b_2 + tu_2 - a_2)^2 + (b_3 + tu_3 - a_3)^2}$

Die Abstandsfunktion d(t) ist minimal, wenn d‘(t) = 0, also:

d‘(t) = $\dfrac{2u_1(b_1 + tu_1 - a_1) + 2u_2(b_2 + tu_2 - a_2) + 2u_3(b_3 + tu_3 - a_3)}{2\sqrt{(b_1 + tu_1 - a_1)^2 + (b_2 + tu_2 - a_2)^2 + (b_3 + tu_3 - a_3)^2}} = 0 \Leftrightarrow$

$$2u_1(b_1 + tu_1 - a_1) + 2u_2(b_2 + tu_2 - a_2) + 2u_3(b_3 + tu_3 - a_3) = 0 \Leftrightarrow$$
$$u_1(b_1 + tu_1 - a_1) + u_2(b_2 + tu_2 - a_2) + u_3(b_3 + tu_3 - a_3) = 0 \Leftrightarrow$$
$$t(u_1^2 + u_2^2 + u_3^2) + u_1(b_1 - a_1) + u_2(b_2 - a_2) + u_3(b_3 - a_3) = 0 \Leftrightarrow$$
$$t(u_1^2 + u_2^2 + u_3^2) = u_1(a_1 - b_1) + u_2(a_2 - b_2) + u_3(a_3 - b_3) \Leftrightarrow$$
$$t_0 = t = \frac{u_1(a_1 - b_1) + u_2(a_2 - b_2) + u_3(a_3 - b_3)}{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}$$

Mit t = t_0 ergibt sich der gesuchte Lotfußpunkt $F(b_1+t_0u_1|b_2+t_0u_2|b_3+t_0u_3)$ auf der Geraden g zum Punkt A gemäß: $\vec{OF} = \vec{b} + t_0 \vec{u} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} + t_0 \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$.

www.michael-buhlmann.de / 04.2016 / Aufgabe 201