Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Vektorrechnung
> Geraden/Punkte

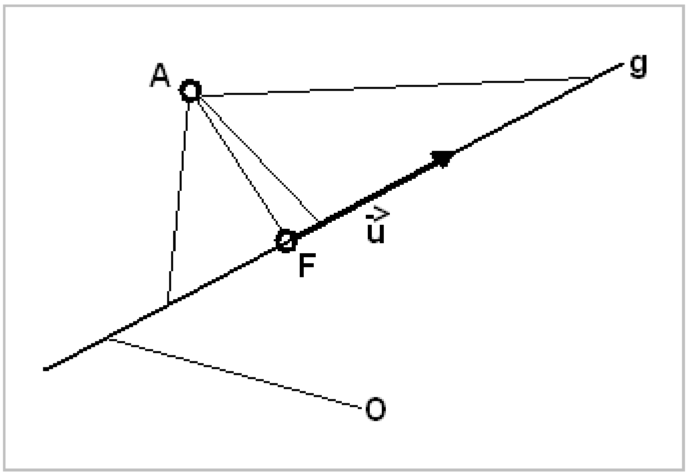
Aufgabe: Beschreibe eine Vorgehensweise, auf welche Weise im dreidimensionalen Vektorraum der Abstand zwischen einer Geraden und einem nicht auf der Geraden liegenden Punkt zu ermitteln ist.

1. Lösung: Die Gerade g sei von der Form: g: $\vec{x} = \vec{b} + t\,\vec{u} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$, der Punkt A habe das Aussehen $A(a_1|a_2|a_3) \notin g$. Dann gilt das Lotfußpunktverfahren mit folgender Vorgehensweise:

1) Jeder „laufende Punkt“ F_t auf der Geraden g hat die Form $F_t(b_1+tu_1|b_2+tu_2|b_3+tu_3) \varepsilon g$.

2) Der Differenzvektor zwischen den Punkten A und F_t hat das Aussehen:

$$\vec{AF_t} = \begin{pmatrix} b_1+tu_1 \\ b_2+tu_2 \\ b_3+tu_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1+tu_1-a_1 \\ b_2+tu_2-a_2 \\ b_3+tu_3-a_3 \end{pmatrix}.$$



3) Der Abstand zwischen der Geraden g und dem Punkt A kann dann ermittelt werden, wenn der Differenzvektor zwischen den Punkten A und F_t senkrecht auf der Geraden, d.h. auf dem Richtungsvektor der Geraden steht, also mit Hilfe des Skalarprodukts:

$$\vec{AF_t} \cdot \vec{u} = \begin{pmatrix} b_1+tu_1-a_1 \\ b_2+tu_2-a_2 \\ b_3+tu_3-a_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = 0 \quad (*)$$

Das Auflösen des Skalarprodukts in Gleichung (*) ergibt dann:

$u_1(b_1 + tu_1 – a_1) + u_2(b_2 + tu_2 – a_2) + u_3(b_3 + tu_3 – a_3) = 0 \Leftrightarrow$
$t(u_1^2+u_2^2+u_3^2) = u_1(a_1-b_1) + u_2(a_2-b_2) + u_3(a_3-b_3) \Leftrightarrow$
$t_0 = t = [u_1(a_1-b_1) + u_2(a_2-b_2) + u_3(a_3-b_3)]/(u_1^2+u_2^2+u_3^2)$.

Mit $t = t_0$ ergibt sich der Lotfußpunkt $F(b_1+t_0u_1|b_2+t_0u_2|b_3+t_0u_3)$ auf der Geraden g zum Punkt A gemäß: $\vec{OF} = \vec{b} + t_0 \vec{u} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} + t_0 \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$.

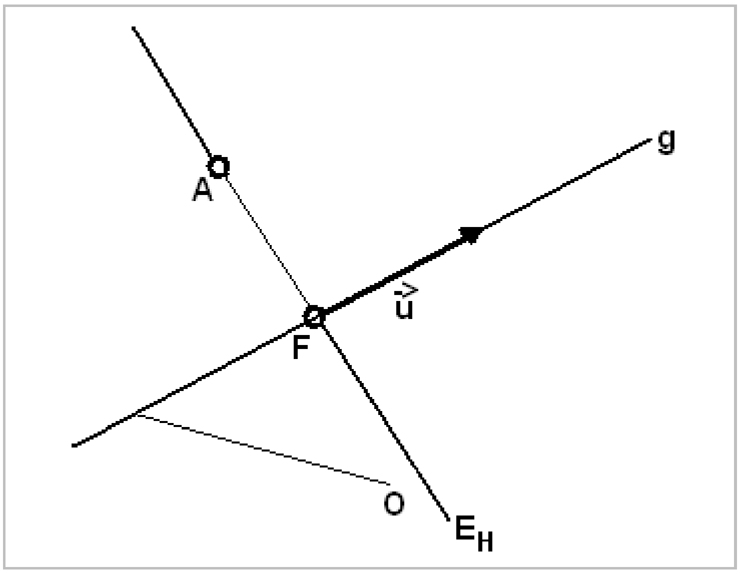
4) Als Abstand zwischen der Geraden g und dem Punkt A ergibt sich schließlich:

$$d(A,g) = \left|\vec{AF}\right| = \left|\begin{pmatrix} b_1 + t_0 u_1 - a_1 \\ b_2 + t_0 u_2 - a_2 \\ b_3 + t_0 u_3 - a_3 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{(b_1 + t_0 u_1 - a_1)^2 + (b_2 + t_0 u_2 - a_2)^2 + (b_3 + t_0 u_3 - a_3)^2}\ .$$

2. Lösung: Die Gerade g sei von der Form: g: $\vec{x} = \vec{b} + t\,\vec{u} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$, der Punkt A habe das Aussehen $A(a_1|a_2|a_3) \notin g$. Dann gilt das Hilfsebenenverfahren mit folgender Vorgehensweise:

1) Mit dem Richtungsvektor der Geraden als Normalenvektor kann eine Hilfsebene E_H durch den Punkt A gebildet werden, die senkrecht auf der Geraden g steht, also:

$$E_H:\ \vec{u} \cdot \vec{x} = \vec{u} \cdot \vec{OA}.$$



In Koordinatenform lautet die Hilfsebene:

$$E_H:\ u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 = u_1a_1 + u_2a_2 + u_3a_3\ (*).$$

2) Wir lassen die Hilfsebene E_H mit der Geraden g (senkrecht) schneiden. Einsetzen der Komponenten $x_1 = b_1 + tu_1$, $x_2 = b_2 + tu_2$, $x_3 = b_3 + tu_3$ der Geraden g in (*) führt auf die Gleichung:

$u_1(b_1 + tu_1) + u_2(b_2 + tu_2) + u_3(b_3 + tu_3) = u_1a_1 + u_2a_2 + u_3a_3 \Leftrightarrow$
$t(u_1^2+u_2^2+u_3^2) = u_1(a_1-b_1) + u_2(a_2-b_2) + u_3(a_3-b_3) \Leftrightarrow$
$t_0 = t = [u_1(a_1-b_1) + u_2(a_2-b_2) + u_3(a_3-b_3)]/(u_1^2+u_2^2+u_3^2)$.

Mit $t = t_0$ ergibt sich der Lotfußpunkt $F(b_1+t_0u_1|b_2+t_0u_2|b_3+t_0u_3)$ auf der Geraden g zum Punkt A gemäß: $\vec{OF} = \vec{b} + t_0 \vec{u} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} + t_0 \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$.

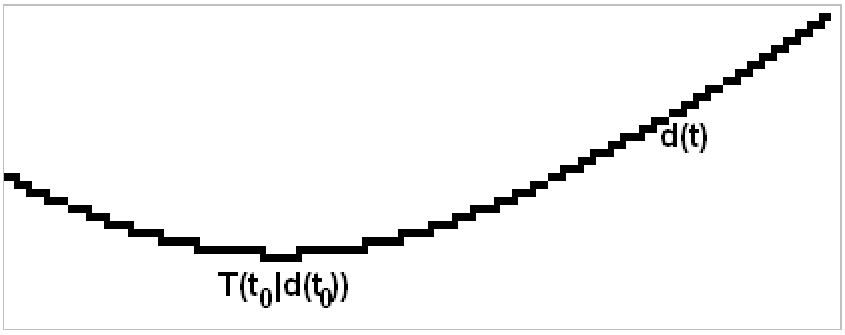
3) Für den Abstand zwischen der Geraden g und dem Punkt A folgt schließlich:

$$d(A,g) = \left|\vec{AF}\right| = \left|\begin{pmatrix} b_1 + t_0 u_1 - a_1 \\ b_2 + t_0 u_2 - a_2 \\ b_3 + t_0 u_3 - a_3 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{(b_1 + t_0 u_1 - a_1)^2 + (b_2 + t_0 u_2 - a_2)^2 + (b_3 + t_0 u_3 - a_3)^2}\ .$$

3. Lösung: Die Gerade g sei von der Form: g: $\vec{x} = \vec{b} + t\,\vec{u} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$, der Punkt A habe das Aussehen $A(a_1|a_2|a_3) \notin g$. Dann gilt das <u>Verfahren mit einer Abstandsfunktion</u> mit folgender Vorgehensweise:

1) Jeder „laufende Punkt" F_t auf der Geraden g hat die Form $F_t(b_1+tu_1|b_2+tu_2|b_3+tu_3)\varepsilon g$.
2) Der Differenzvektor zwischen den Punkten A und F_t hat das Aussehen:

$$\vec{AF_t} = \begin{pmatrix} b_1+tu_1 \\ b_2+tu_2 \\ b_3+tu_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1+tu_1-a_1 \\ b_2+tu_2-a_2 \\ b_3+tu_3-a_3 \end{pmatrix}.$$



3) Der Lotfußpunkt F auf der Geraden g liegt dann vor, wenn die Abstandsfunktion zwischen dem „laufenden Punkt" F_t der Geraden g und dem Punkt A minimal wird, wenn also die Abstandsfunktion einen Tiefpunkt hat. Die Abstandsfunktion d(t) kann ermittelt werden als:

$$d(t) = \left|\vec{AF_t}\right| = \left|\begin{pmatrix} b_1+tu_1-a_1 \\ b_2+tu_2-a_2 \\ b_3+tu_3-a_3 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{(b_1+tu_1-a_1)^2+(b_2+tu_2-a_2)^2+(b_3+tu_3-a_3)^2}$$

Die Abstandsfunktion d(t) ist minimal, wenn d'(t) = 0, also:

$$d'(t) = \frac{2u_1(b_1+tu_1-a_1)+2u_2(b_2+tu_2-a_2)+2u_3(b_3+tu_3-a_3)}{2\sqrt{(b_1+tu_1-a_1)^2+(b_2+tu_2-a_2)^2+(b_3+tu_3-a_3)^2}} = 0 \Leftrightarrow$$

$$2u_1(b_1+tu_1-a_1)+2u_2(b_2+tu_2-a_2)+2u_3(b_3+tu_3-a_3) = 0 \Leftrightarrow$$

$$u_1(b_1+tu_1-a_1)+u_2(b_2+tu_2-a_2)+u_3(b_3+tu_3-a_3) = 0 \Leftrightarrow$$

$$t(u_1^2+u_2^2+u_3^2)+u_1(b_1-a_1)+u_2(b_2-a_2)+u_3(b_3-a_3) = 0 \Leftrightarrow$$

$$t(u_1^2+u_2^2+u_3^2) = u_1(a_1-b_1)+u_2(a_2-b_2)+u_3(a_3-b_3) \Leftrightarrow$$

$$t_0 = t = \frac{u_1(a_1-b_1)+u_2(a_2-b_2)+u_3(a_3-b_3)}{u_1^2+u_2^2+u_3^2}$$

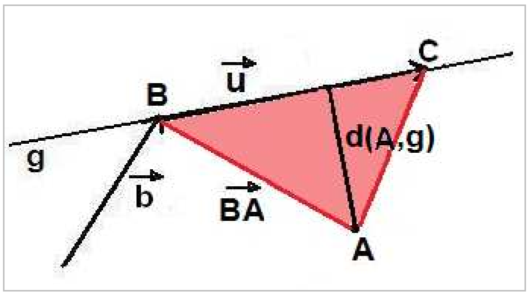
Mit $t = t_0$ ergibt sich der Lotfußpunkt $F(b_1+t_0u_1|b_2+t_0u_2|b_3+t_0u_3)$ auf der Geraden g zum Punkt A gemäß: $\vec{OF} = \vec{b} + t_0\,\vec{u} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} + t_0\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$.

4) Als minimale Entfernung und Abstand zwischen der Geraden g und dem Punkt A ergibt sich:

$$d(A,g) = \left|\vec{AF}\right| = \left|\begin{pmatrix} b_1+t_0u_1-a_1 \\ b_2+t_0u_2-a_2 \\ b_3+t_0u_3-a_3 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{(b_1+t_0u_1-a_1)^2+(b_2+t_0u_2-a_2)^2+(b_3+t_0u_3-a_3)^2}\ .$$

4. Lösung: Die Gerade g sei von der Form: g: $\vec{x} = \vec{b} + t\,\vec{u} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$, der Punkt A habe das Aussehen $A(a_1|a_2|a_3) \notin g$. Dann ergibt sich mit Hilfe des Kreuzprodukts der Abstand zwischen Punkt und Geraden wie folgt:

1) Mit $\vec{OB} = \vec{b}$ betrachten wir das Kreuzprodukt des Differenzvektors $\vec{BA}$ von Punkt A und Stützvektor B der Geraden g und des Richtungsvektors der Geraden g, also: $\vec{u} \times \left(\vec{OA} - \vec{b} \right)$. Der Betrag des Kreuzprodukts ist dann: $\left| \vec{u} \times \left(\vec{OA} - \vec{b} \right) \right| = \left| \vec{u} \right| \cdot \left| \vec{OA} - \vec{b} \right| \cdot \sin\Theta$ mit dem Winkel θ zwischen den Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{OA} - \vec{b}$. Der Betrag des Kreuzprodukts entspricht damit der Fläche A_P des durch $\vec{u}$ und $\vec{OA} - \vec{b}$ aufgespannten Parallelogramms bzw. der doppelten Fläche A_D des Dreiecks ABC.



2) Die Höhe dieses Parallelogramms bzw. dieses Dreiecks ist der Abstand des Punktes A von der Geraden g, also: d(A,g).

III. Es folgt mit: $A_P = \left| \vec{u} \times \left(\vec{OA} - \vec{b} \right) \right|$ und $A_P = \left| \vec{u} \right| \cdot d(A,g)$ bzw. mit: $A_D = \frac{1}{2} \left| \vec{u} \times \left(\vec{OA} - \vec{b} \right) \right|$ und $A_D = \frac{1}{2} \left| \vec{u} \right| \cdot d(A,g)$ durch Gleichsetzen und Umformen:

$$\left| \vec{u} \times \left(\vec{OA} - \vec{b} \right) \right| = \left| \vec{u} \right| \cdot d(A,g) \Leftrightarrow$$

$$d(A,g) = \frac{\left| \vec{u} \times \left(\vec{OA} - \vec{b} \right) \right|}{\left| \vec{u} \right|} = \frac{\left| \vec{u} \times \vec{BA} \right|}{\left| \vec{u} \right|}$$

die allgemeine Formel für die Berechnung des Abstandes zwischen Punkt und Geraden.

www.michael-buhlmann.de / 04.2016 / Aufgabe 202