Michael Buhlmann

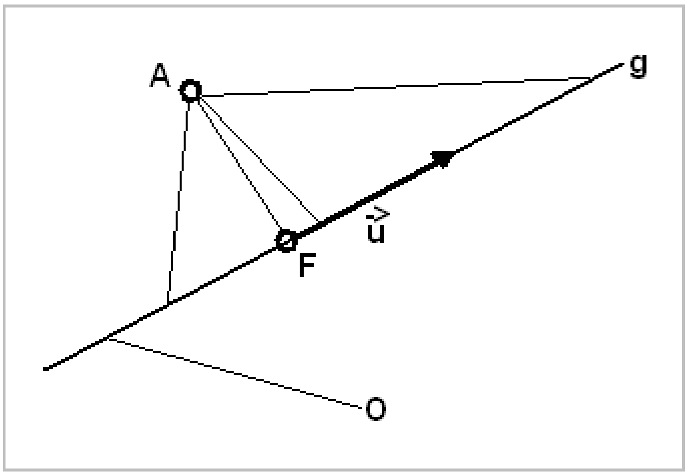
Mathematikaufgaben
> Vektorrechnung
> Geraden/Punkte

Aufgabe: Beschreibe eine Vorgehensweise, auf welche Weise im dreidimensionalen Vektorraum zu einer Geraden und einem nicht auf der Geraden liegenden Punkt eine zur Geraden senkrechte Lotgerade durch den Punkt konstruiert werden kann.

1. Lösung: Die Gerade g sei von der Form: g: $\vec{x} = \vec{b} + t\,\vec{u} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$, der Punkt A habe das Aussehen $A(a_1|a_2|a_3) \notin g$. Gesucht ist zunächst auf der Geraden der Lotfußpunkt $F \varepsilon g$ zum Punkt A, die Lotgerade h wird dann mit Hilfe der Punkte A und F konstruiert. Es gilt dazu das <u>Lotfußpunktverfahren</u> mit folgender Vorgehensweise:

1) Jeder „laufende Punkt" F_t auf der Geraden g hat die Form $F_t(b_1+tu_1|b_2+tu_2|b_3+tu_3) \varepsilon g$.
2) Der Differenzvektor zwischen den Punkten A und F_t hat das Aussehen:

$$\vec{AF_t} = \begin{pmatrix} b_1+tu_1 \\ b_2+tu_2 \\ b_3+tu_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1+tu_1-a_1 \\ b_2+tu_2-a_2 \\ b_3+tu_3-a_3 \end{pmatrix}.$$



3) Der Lotfußpunkt auf der Geraden g zum Punkt A kann dann ermittelt werden, wenn der Differenzvektor zwischen den Punkten A und F_t senkrecht auf der Geraden, d.h. auf dem Richtungsvektor der Geraden steht, also mit Hilfe des Skalarprodukts:

$$\vec{AF_t} \cdot \vec{u} = \begin{pmatrix} b_1+tu_1-a_1 \\ b_2+tu_2-a_2 \\ b_3+tu_3-a_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = 0 \quad (*)$$

Das Auflösen des Skalarprodukts in Gleichung (*) ergibt dann:

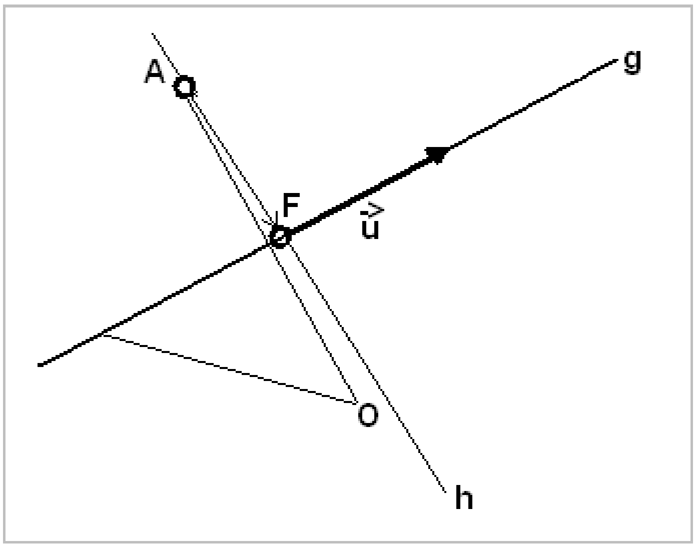
$u_1(b_1 + tu_1 - a_1) + u_2(b_2 + tu_2 - a_2) + u_3(b_3 + tu_3 - a_3) = 0 \Leftrightarrow$
$t(u_1^2+u_2^2+u_3^2) = u_1(a_1-b_1) + u_2(a_2-b_2) + u_3(a_3-b_3) \Leftrightarrow$
$t_0 = t = [u_1(a_1-b_1) + u_2(a_2-b_2) + u_3(a_3-b_3)]/(u_1^2+u_2^2+u_3^2)$.

Mit $t = t_0$ ergibt sich der Lotfußpunkt $F(b_1+t_0u_1|b_2+t_0u_2|b_3+t_0u_3)$ auf der Geraden g zum Punkt A gemäß: $\vec{OF} = \vec{b} + t_0 \vec{u} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} + t_0 \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$.

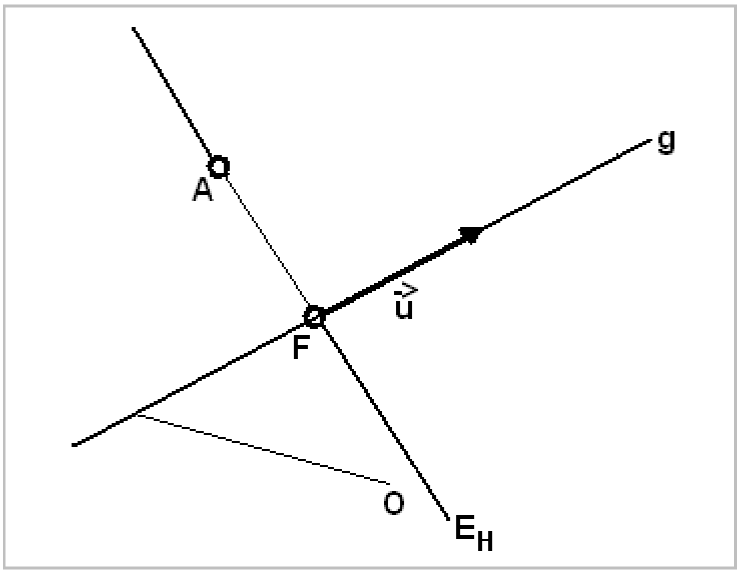
Mit dem ermittelten Lotfußpunkt Fεg und dem vorgegebenen Punkt A erfolgt die Konstruktion der Lotgeraden h gemäß:

$$h: \vec{x} = \vec{OA} + s\,\vec{AF} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} b_1 + t_0 u_1 - a_1 \\ b_2 + t_0 u_2 - a_2 \\ b_3 + t_0 u_3 - a_3 \end{pmatrix}.$$

Die Lotgerade verläuft damit durch den Punkt A und steht im Lotfußpunkt F senkrecht auf der Geraden g.



2. Lösung: Die Gerade g sei von der Form: g: $\vec{x} = \vec{b} + t\,\vec{u} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$, der Punkt A habe das Aussehen $A(a_1|a_2|a_3) \notin g$. Gesucht ist zunächst auf der Geraden der Lotfußpunkt Fεg zum Punkt A, die Lotgerade h wird dann mit Hilfe der Punkte A und F konstruiert.



Es gilt dazu das Hilfsebenenverfahren mit folgender Vorgehensweise:

1) Mit dem Richtungsvektor der Geraden als Normalenvektor kann eine Hilfsebene E_H durch den Punkt A gebildet werden, die senkrecht auf der Geraden g steht, also:

$$E_H\text{: } \vec{u}\cdot\vec{x} = \vec{u}\cdot\vec{OA}.$$

In Koordinatenform lautet die Hilfsebene:

$$E_H\text{: } u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 = u_1a_1 + u_2a_2 + u_3a_3 \ (*).$$

2) Wir lassen die Hilfsebene E_H mit der Geraden g schneiden. Einsetzen der Komponenten $x_1 = b_1 + tu_1$, $x_2 = b_2 + tu_2$, $x_3 = b_3 + tu_3$ der Geraden g in (*) führt auf die Gleichung:

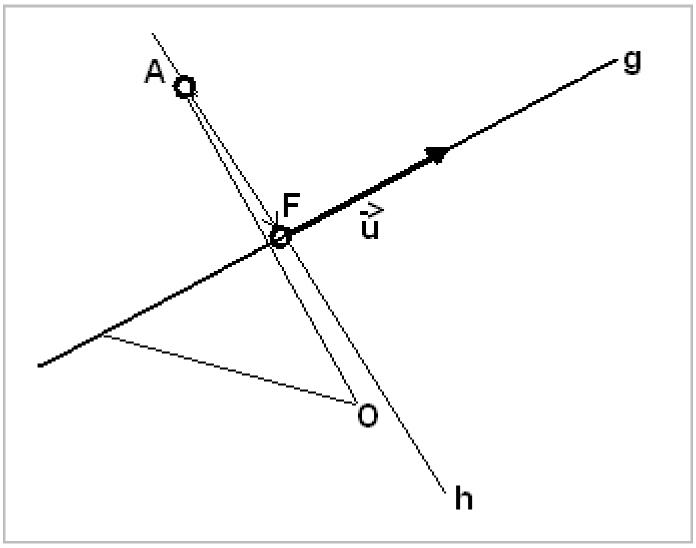
$u_1(b_1 + tu_1) + u_2(b_2 + tu_2) + u_3(b_3 + tu_3) = u_1a_1 + u_2a_2 + u_3a_3 \Leftrightarrow$
$t(u_1^2+u_2^2+u_3^2) = u_1(a_1-b_1) + u_2(a_2-b_2) + u_3(a_3-b_3) \Leftrightarrow$
$t_0 = t = [u_1(a_1-b_1) + u_2(a_2-b_2) + u_3(a_3-b_3)]/(u_1^2+u_2^2+u_3^2)$.

Mit $t = t_0$ ergibt sich der Lotfußpunkt $F(b_1+t_0u_1|b_2+t_0u_2|b_3+t_0u_3)$ auf der Geraden g zum Punkt A gemäß: $\vec{OF} = \vec{b} + t_0\vec{u} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} + t_0\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$.

Mit dem ermittelten Lotfußpunkt Fεg und dem vorgegebenen Punkt A erfolgt die <u>Konstruktion der Lotgeraden</u> h gemäß:

$$h\text{: } \vec{x} = \vec{OA} + s\,\vec{AF} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} b_1 + t_0u_1 - a_1 \\ b_2 + t_0u_2 - a_2 \\ b_3 + t_0u_3 - a_3 \end{pmatrix}.$$

Die Lotgerade verläuft damit durch den Punkt A und steht im Lotfußpunkt F senkrecht auf der Geraden g.



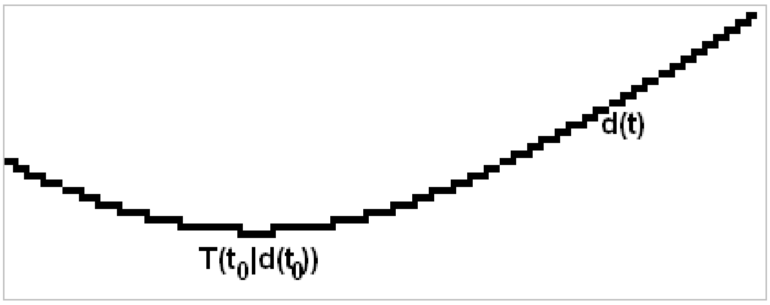
3. Lösung: Die Gerade g sei von der Form: g: $\vec{x} = \vec{b} + t\,\vec{u} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$, der Punkt A habe das Aussehen $A(a_1|a_2|a_3) \notin g$. Gesucht ist zunächst auf der Geraden der Lotfußpunkt Fεg zum Punkt A, die Lotgerade h wird dann mit Hilfe der Punkte A und F konstruiert. Es gilt dazu das <u>Verfahren mit einer Abstandsfunktion</u> mit folgender Vorgehensweise:

1) Jeder „laufende Punkt“ F_t auf der Geraden g hat die Form $F_t(b_1+tu_1|b_2+tu_2|b_3+tu_3)$εg.
2) Der Differenzvektor zwischen den Punkten A und F_t hat das Aussehen:

$$\vec{AF_t} = \begin{pmatrix} b_1 + tu_1 \\ b_2 + tu_2 \\ b_3 + tu_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 + tu_1 - a_1 \\ b_2 + tu_2 - a_2 \\ b_3 + tu_3 - a_3 \end{pmatrix}.$$

3) Der Lotfußpunkt F auf der Geraden g liegt dann vor, wenn die Abstandsfunktion zwischen dem „laufenden Punkt“ F_t der Geraden g und dem Punkt A minimal wird, wenn also die Abstandsfunkti-

on einen Tiefpunkt hat.



Die Abstandsfunktion d(t) kann ermittelt werden als:

$$d(t) = \left|\overrightarrow{AF_t}\right| = \left|\begin{pmatrix} b_1 + tu_1 - a_1 \\ b_2 + tu_2 - a_2 \\ b_3 + tu_3 - a_3 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{(b_1 + tu_1 - a_1)^2 + (b_2 + tu_2 - a_2)^2 + (b_3 + tu_3 - a_3)^2}$$

Die Abstandsfunktion d(t) ist minimal, wenn d‘(t) = 0, also:

$$d'(t) = \frac{2u_1(b_1 + tu_1 - a_1) + 2u_2(b_2 + tu_2 - a_2) + 2u_3(b_3 + tu_3 - a_3)}{2\sqrt{(b_1 + tu_1 - a_1)^2 + (b_2 + tu_2 - a_2)^2 + (b_3 + tu_3 - a_3)^2}} = 0 \Leftrightarrow$$

$$2u_1(b_1 + tu_1 - a_1) + 2u_2(b_2 + tu_2 - a_2) + 2u_3(b_3 + tu_3 - a_3) = 0 \Leftrightarrow$$

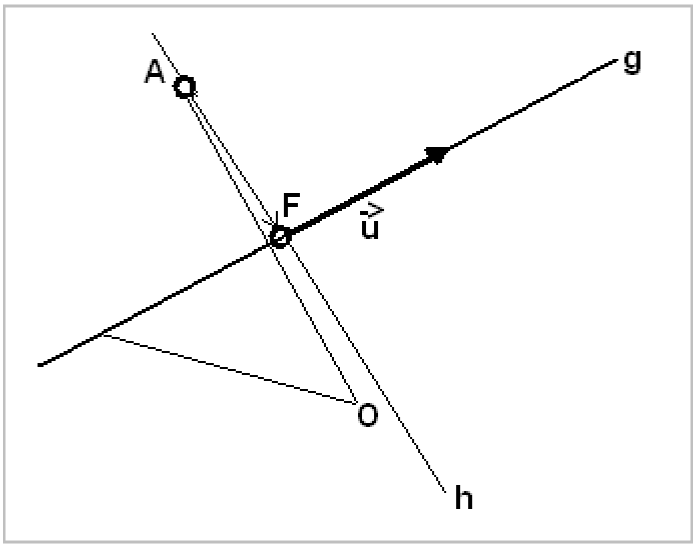
$$u_1(b_1 + tu_1 - a_1) + u_2(b_2 + tu_2 - a_2) + u_3(b_3 + tu_3 - a_3) = 0 \Leftrightarrow$$

$$t(u_1^2 + u_2^2 + u_3^2) + u_1(b_1 - a_1) + u_2(b_2 - a_2) + u_3(b_3 - a_3) = 0 \Leftrightarrow$$

$$t(u_1^2 + u_2^2 + u_3^2) = u_1(a_1 - b_1) + u_2(a_2 - b_2) + u_3(a_3 - b_3) \Leftrightarrow$$

$$t_0 = t = \frac{u_1(a_1 - b_1) + u_2(a_2 - b_2) + u_3(a_3 - b_3)}{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}$$

Mit $t = t_0$ ergibt sich der Lotfußpunkt $F(b_1+t_0u_1|b_2+t_0u_2|b_3+t_0u_3)$ auf der Geraden g zum Punkt A gemäß: $\overrightarrow{OF} = \vec{b} + t_0\,\vec{u} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} + t_0 \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$.



Mit dem ermittelten Lotfußpunkt Fεg und dem vorgegebenen Punkt A erfolgt die Konstruktion der Lotgeraden h gemäß:

$$h: \vec{x} = \overrightarrow{OA} + s\,\overrightarrow{AF} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} b_1 + t_0u_1 - a_1 \\ b_2 + t_0u_2 - a_2 \\ b_3 + t_0u_3 - a_3 \end{pmatrix}.$$

Die Lotgerade verläuft damit durch den Punkt A und steht im Lotfußpunkt F senkrecht auf der Geraden g.

www.michael-buhlmann.de / 04.2016 / Aufgabe 203