

# Mathematikaufgaben

## > Vektorrechnung

## > Geraden/Punkte

**Aufgabe:** Berechne den Abstand zwischen dem Punkt  $R(-1|5|-8)$  und der Geraden:  $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 8 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

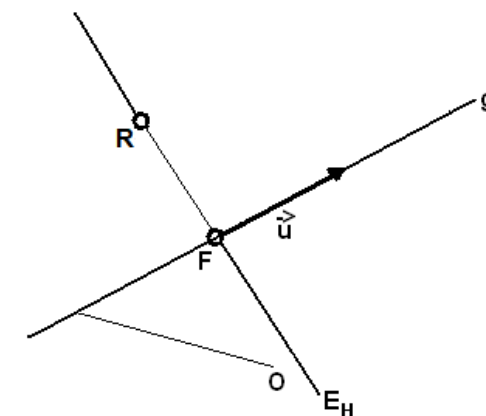
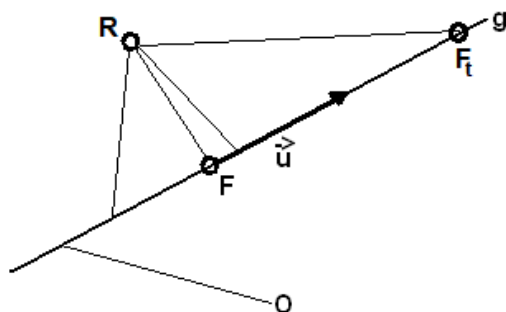
Lösungen: Wir geben nachstehend fünf (synchronisierte) Lösungsmöglichkeiten an, die zum Teil identische Vorgehensweisen und Rechnungen beinhalten.

1. Lösung (Abstandsfunktion):

2. Lösung (Abstandsfunktion):

3. Lösung (Orthogonalitätsbedingung);

4. Lösung (Hilfsebenenverfahren):



I. Für jeden „laufenden“ Punkt  $F_t$  auf der Geraden  $g$  gilt vermöge:  $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 8 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ :  $F_t(8-2t|-1+2t|4+t)$ , so dass der Differenz-

vektor  $\vec{RF}_t$  den (nicht auf der Geraden liegenden) Punkt  $R$  mit dem „laufenden“ Geradenpunkt  $F_t$  verbindet. Für den Differenzvektor

$$\text{ergibt sich: } \vec{RF}_t = \begin{pmatrix} 8-2t \\ -1+2t \\ 4+t \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9-2t \\ -6+2t \\ 12+t \end{pmatrix}.$$

I. Es wird zunächst die Hilfsebene  $E_H$  konstruiert, die senkrecht zur Gerade  $g$  steht und durch den (nicht auf der Geraden liegenden) Punkt  $R$  verläuft. Für den Normalenvektor der Ebene gilt:

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

II. Der Betrag des Differenzvektors  $\left| \vec{RF}_t \right|$  liefert die Länge zwischen Punkt R und Geradenpunkt  $F_t$ ; diese Länge ist minimal und damit identisch mit dem Abstand  $d(R,g)$  zwischen Punkt R und Gerade g, wenn der Geradenpunkt  $F_t$  der Lotfußpunkt F der Geraden g bzgl. des Punktes R ist. Wir definieren die zu minimierende Abstandsfunktion  $d(t) = \left| \vec{RF}_t \right|$  mit:

$$d(t) = \left| \begin{pmatrix} 9-2t \\ -6+2t \\ 12+t \end{pmatrix} \right| = \sqrt{(9-2t)^2 + (-6+2t)^2 + (12+t)^2}.$$

Die Funktion  $d(t)$  ist zu minimieren. Dies geschieht über die Anzeige des Graphen von  $d(t)$  mit:

die Ableitung  $d'(t)$  der Funktion  $d(t)$  vermöge des Sachverhaltes, dass die Quadratwurzelfunktion  $d(t)$  mit ihren quadratischen Summanden genau ein Minimum auf den ganzen reellen Zahlen besitzt. Die Ableitung ergibt sich gemäß  $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$  als Ableitung der Quadratwurzelfunktion und nach der Kettenregel als:  
 $d'(t) =$

II. Der Abstand  $d(R,g)$  zwischen Punkt R und Gerade g ist gegeben, wenn der Differenzvektor  $\vec{RF}_t$  senkrecht auf der Geraden g steht. Unter den Geradenpunkten  $F_t$  erkennt man also den Lotfußpunkt F, weil dort die Orthogonalitätsbedingung:

$$\vec{RF}_t \cdot \vec{u} = 0$$

mit  $\vec{u}$  als Richtungsvektor der Geraden g gilt. Auswerten dieser Bedingung führt auf:

$$\begin{pmatrix} 9-2t \\ -6+2t \\ 12+t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

und das Ausmultiplizieren des Skalarprodukts:

$$(9-2t) \cdot (-2) + (-6+2t) \cdot 2 + (12+t) \cdot 1 = 0.$$

Es folgt die Gleichung:

denn wegen der Orthogonalität zwischen Geraden und Ebene ist der Normalenvektor der Ebene der Richtungsvektor der Geraden. Die Ebene verläuft durch den Punkt R, also gilt (nach der Normalenform der Ebene, Ortsvektor):

$$E_H: \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ -8 \end{pmatrix},$$

woraus durch Ausmultiplizieren der Skalarprodukte

$$E_H: -2x_1 + 2x_2 + x_3 = (-2) \cdot (-1) + 2 \cdot 5 + 1 \cdot (-8)$$

und:

$$E_H: -2x_1 + 2x_2 + x_3 = 4$$

als gesuchte Hilfsebene  $E_H$  folgt.

II. Der Lotfußpunkt ist der Punkt F der Geraden g bzgl. des Punktes R. Er bestimmt sich als Schnittpunkt von Hilfsebene  $E_H$  und Geraden g. Demgemäß zerlegen wir die Gerade g in die Komponenten:

$$x_1 = 8-2t$$

$$x_2 = -1+2t$$

$$x_3 = 4+t$$

und setzen die Koordinaten  $x_1, x_2, x_3$  in die Hilfsebene  $E_H$  ein. Es ergibt sich eine Gleichung mit dem Parameter t, also:

$$-2(8-2t) + 2(-1+2t) + (4+t) = 4.$$

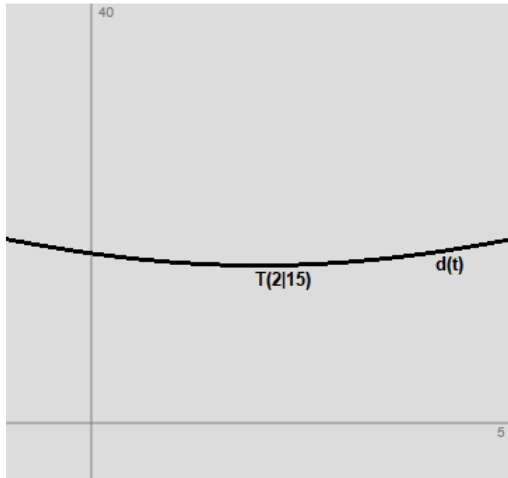
Auflösen der Klammern ergibt:

$$-16+4t-2+4t+4+t = 4,$$

Das Zusammenfassen der Zahlen und t auf der linken Seite der Gleichung führt auf:

$$-14+9t = 4,$$

die Addition mit der Zahl 14 schließlich auf:



$$\frac{2(9-2t) \cdot (-2) + 2(-6+2t) \cdot 2 + 2(12+t) \cdot 1}{2\sqrt{(9-2t)^2 + (-6+2t)^2 + (12+t)^2}}$$

$$= \frac{-4(9-2t) + 4(-6+2t) + 2(12+t)}{2\sqrt{(9-2t)^2 + (-6+2t)^2 + (12+t)^2}}$$

Nach den Regeln der Differenzialrechnung liegt das Minimum der Funktion  $d(t)$  dort, wo  $d'(t) = 0$  gilt (Extremwertbedingung). Der Bruch von  $d'(t)$  ist 0, wenn der Zähler 0 ist, also:

$$-4(9-2t) + 4(-6+2t) + 2(12+t) = 0.$$

Teilen durch die Zahl 2 ergibt die Gleichung:

$$-2(9-2t) + 2(-6+2t) + (12+t) = 0;$$

durch das Auflösen der Klammern folgt:

$$-18 + 4t - 12 + 4t + 12 + t = 0.$$

Das Zusammenfassen der Zahlen und  $t$  auf der linken Seite der Gleichung führt auf:

$$-18 + 9t = 0,$$

die Addition mit der Zahl 18 schließlich auf:

$$9t = 18,$$

so dass sich nach Teilen durch die Zahl 9 der Parameterwert  $t=2$  ergibt.

III. Wir ermitteln den Lotfußpunkt  $F$  auf der Geraden  $g$  bzgl. des Punktes  $R$  durch Einsetzen des errechneten Parameters  $t=2$  in die Parametergleichung der Geraden  $g$  als:

$$\vec{OF} = \begin{pmatrix} 8 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix},$$

so dass als Lotfußpunkt der Punkt  $F(4|3|6)$  folgt. Zur Bestimmung des Abstands bilden wir den Differenzvektor  $\vec{RF}$

, indem wir den Parameter  $t=2$  in den Differenzvektor  $\vec{RF}_t$  einsetzen und:

$$\vec{RF} = \vec{RF}_2 = \begin{pmatrix} 9 - 2 \cdot 2 \\ -6 + 2 \cdot 2 \\ 12 + 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 14 \end{pmatrix}$$

erhalten.

als:

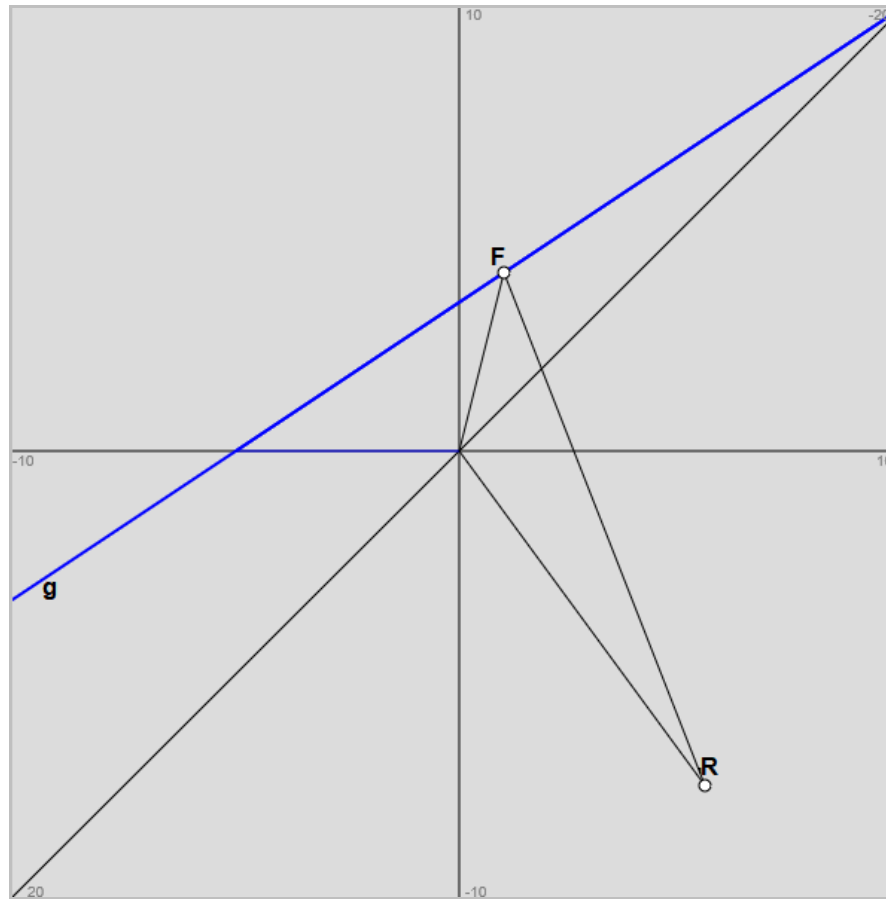
$$\vec{RF} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 14 \end{pmatrix}.$$

III. Es ergibt sich auf Grund des Tiefpunktes  $T(2|15)$  der Funktion  $d(t)$  bei  $t=2$  mit  $d(R,g) = d(2) = 15$  der gesuchte Abstand zwischen Punkt  $R$  und Geraden  $g$ .

Der Abstand zwischen Punkt R und Gerade g ist der Betrag des Differenzvektors  $\vec{RF}$ , also:

$$d(R,g) = \left| \vec{RF} \right| = \left| \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 14 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{5^2 + (-2)^2 + 14^2} = \sqrt{225} = 15.$$

IV. Wir kommen zu dem Ergebnis: Der Abstand zwischen dem Punkt R(-1|5|-8) und der Geraden:  $\vec{x} = \begin{pmatrix} 8 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$  beträgt:  $d(R,g) = 15$  LE.



**5. Lösung:** I. Wir verwenden die Kreuzprodukt-/Vektorproduktformel zur direkten Bestimmung des Abstands  $d(R,g)$  zwischen einem (nicht auf der Geraden liegenden) Punkt R und einer Geraden g. Mit Stützvektor  $\vec{OA}$  und Richtungsvektor  $\vec{u}$  der Geraden g ergibt sich:

$$d(R,g) = \frac{\left| \begin{array}{c} \vec{u} \times \vec{AR} \end{array} \right|}{\left| \vec{u} \right|}.$$

II. Wir bilden zunächst den Differenzvektor zwischen dem Stützvektor der Geraden g und dem Punkt R als:

$$\vec{AR} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ -8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 8 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ 6 \\ -12 \end{pmatrix}.$$

Wir errechnen das Kreuzprodukt aus Differenzvektor und Richtungsvektor der Geraden g:

$$\vec{u} \times \vec{AR} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -9 \\ 6 \\ -12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -33 \\ -30 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Der Abstand errechnet sich nach obiger Formel als:

$$d(R,g) = \frac{\left| \begin{array}{c} \vec{u} \times \vec{AR} \end{array} \right|}{\left| \vec{u} \right|} = \frac{\left| \begin{pmatrix} -33 \\ -30 \\ 6 \end{pmatrix} \right|}{\left| \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right|} = \frac{\sqrt{(-33)^2 + (-30)^2 + 6^2}}{\sqrt{(-2)^2 + 2^2 + 1^2}} = \frac{\sqrt{2025}}{\sqrt{9}} = \frac{45}{3} = 15 \text{ LE.}$$

(LE = Längeneinheiten)