Michael Buhlmann

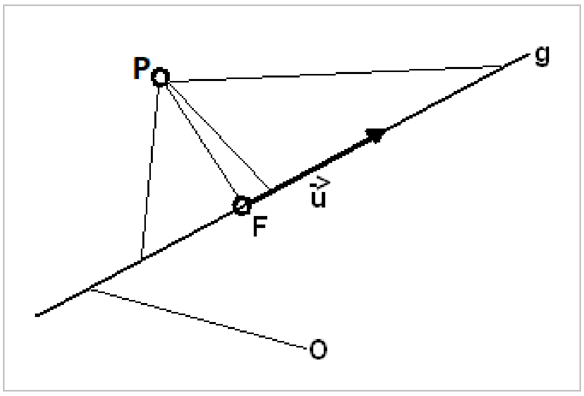
Mathematikaufgaben
> Vektorrechnung
> Geraden/Punkte

Aufgabe: Berechne den Abstand zwischen der Geraden g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 14 \\ -8 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 8 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$ und dem Punkt P(2|7|-2).

Lösung: I. Allgemein gelten die folgenden Überlegungen bzgl. einer Geraden g und einem nicht auf der Geraden liegenden Punkt P: Die Gerade g sei von der Form: g: $\vec{x} = \vec{b} + t\,\vec{u} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$, der Punkt P habe das Aussehen $P(p_1|p_2|p_3) \notin g$. Gesucht ist zunächst auf der Geraden der Lotfußpunkt Fεg zum Punkt P, der Abstand zwischen dem Punkt P und der Geraden g ist dann der Abstand zwischen dem Punkt P und dem Lotfußpunkt F. Es gilt dazu das <u>Lotfußpunktverfahren (Orthogonalitätsbedingung)</u> mit folgender Vorgehensweise:

1) Jeder „laufende Punkt“ F_t auf der Geraden g hat die Form $F_t(b_1+tu_1|b_2+tu_2|b_3+tu_3)$εg.
2) Der Differenzvektor zwischen den Punkten P und F_t hat das Aussehen:

$$\vec{PF_t} = \begin{pmatrix} b_1+tu_1 \\ b_2+tu_2 \\ b_3+tu_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1+tu_1-p_1 \\ b_2+tu_2-p_2 \\ b_3+tu_3-p_3 \end{pmatrix}.$$



3) Der Lotfußpunkt auf der Geraden g zum Punkt P kann dann ermittelt werden, wenn der Differenzvektor zwischen den Punkten P und F_t senkrecht auf der Geraden, d.h. auf dem Richtungsvektor der Geraden steht, also mit Hilfe des Skalarprodukts:

$$\vec{PF_t} \cdot \vec{u} = \begin{pmatrix} b_1+tu_1-p_1 \\ b_2+tu_2-p_2 \\ b_3+tu_3-p_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = 0 \quad (*)$$

Das Auflösen des Skalarprodukts in Gleichung (*) ergibt dann:

$u_1(b_1 + tu_1 - p_1) + u_2(b_2 + tu_2 - p_2) + u_3(b_3 + tu_3 - p_3) = 0 \Leftrightarrow$
$t(u_1^2+u_2^2+u_3^2) = u_1(p_1-b_1) + u_2(p_2-b_2) + u_3(p_3-b_3) \Leftrightarrow$
$t_0 = t = [u_1(p_1-b_1) + u_2(p_2-b_2) + u_3(p_3-b_3)]/(u_1^2+u_2^2+u_3^2)$.

Mit $t = t_0$ ergibt sich der Lotfußpunkt $F(b_1+t_0u_1|b_2+t_0u_2|b_3+t_0u_3)$ auf der Geraden g zum Punkt P gemäß:

$$\overrightarrow{OF} = \vec{b} + t_0 \vec{u} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} + t_0 \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}.$$

4) Mit dem ermittelten Lotfußpunkt Fεg lässt sich der <u>Abstand</u> d(P, g) des vorgegebenen Punktes P von der Geraden g berechnen als – wie gesagt – Abstand zwischen Punkt P und Lotfußpunkt F, als Länge des Vektors $\overrightarrow{PF}$:

$$d(P, g) = \left|\overrightarrow{PF}\right| = \left|\begin{pmatrix} b_1 + t_0 u_1 - p_1 \\ b_2 + t_0 u_2 - p_2 \\ b_3 + t_0 u_3 - p_3 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{(b_1 + t_0 u_1 - p_1)^2 + (b_2 + t_0 u_2 - p_2)^2 + (b_3 + t_0 u_3 - p_3)^2}\ .$$

II. Gemäß der Geradengleichung g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 14 \\ -8 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 8 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$ (in Parameterform) hat jeder „laufende" Punkt auf der Geraden die Form F_t(14+8t|-8–4t|4+t). Der Differenzvektor zwischen Punkt P und „laufendem" Punkt F_t ist damit:

$$\overrightarrow{PF_t} = \begin{pmatrix} 14+8t \\ -8-4t \\ 4+t \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12+8t \\ -15-4t \\ 6+t \end{pmatrix},$$

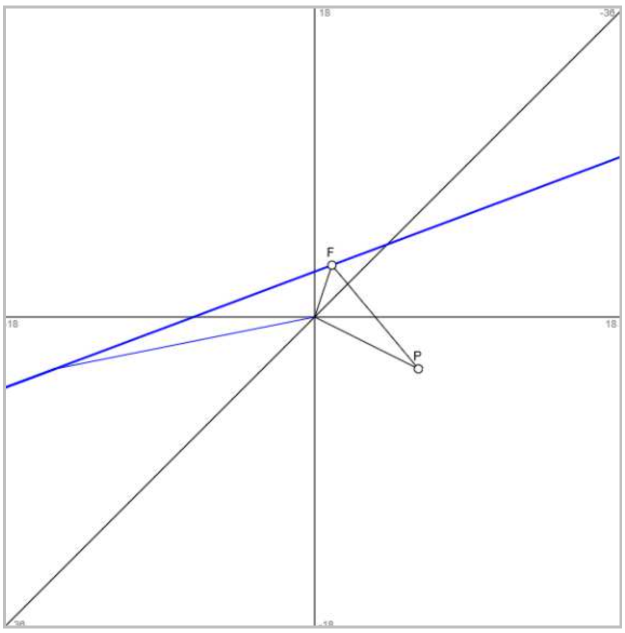
das Skalarprodukt aus Differenzvektor und Richtungsvektor der Geraden muss Null ergeben:

$\begin{pmatrix} 12+8t \\ -15-4t \\ 6+t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$ ⇔ (12+8t)·8 + (-15–4t)·(-4) + (6+t)·1 = 0 ⇔ 96 + 64t + 60 + 16t + 6 + t = 0 ⇔ 162 + 81t = 0 ⇔ 81t = -162 ⇔ t = -2.

Für t = -2 liegt also der gesuchte Lotfußpunkt bei: F(14+8·(-2)|-8–4·(-2)|4+(-2)) = F(-2|0|2). Der zu berechnende Abstand zwischen dem Punkt P und der Geraden g ergibt sich daher als:

$$d(P, g) = \left|\overrightarrow{PF}\right| = \left|\begin{pmatrix} 12+8\cdot(-2) \\ -15-4\cdot(-2) \\ 6+(-2) \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} -4 \\ -7 \\ 4 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{(-4)^2 + (-7)^2 + 4^2} = \sqrt{81} = 9 \text{ LE}$$

(LE = Längeneinheiten).



www.michael-buhlmann.de / 06.2018 / Aufgabe 590