

# Mathematikaufgaben

## > Vektorrechnung

## > Geraden/Punkte

**Aufgabe:** Berechne den Abstand zwischen der Geraden  $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix}$  und dem Punkt

$P(-4|3|-5)$ .

**Lösung:** I. Für eine Gerade  $g: \vec{x} = \vec{a} + t \vec{u}$  mit Stützvektor  $\vec{a} = \vec{OA}$  und Richtungsvektor  $\vec{u}$  (in Parameterform) und einen Punkt P gilt vermöge des Kreuzproduktes (Vektorprodukt, äußeres Produkt) die Abstandsformel:

$$d(P,g) = \frac{\left| \vec{u} \times \left( \vec{OP} - \vec{a} \right) \right|}{\left| \vec{u} \right|} = \frac{\left| \vec{u} \times \vec{AP} \right|}{\left| \vec{u} \right|}.$$

Das Kreuzprodukt berechnet sich gemäß:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}.$$

II. Die Geradengleichung  $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix}$  besitzt den Stützvektor  $\begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$  und den Richtungsvektor

$\begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix}$ . Wir bilden mit dem vorgegebenen Punkt  $P(-4|3|-5)$ :  $\vec{AP} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -11 \end{pmatrix}$ , weiter

das Kreuzprodukt:  $\vec{u} \times \vec{AP} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -50 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ . Es ergibt sich nach obiger Abstandsformel:

$$d(P,g) = \frac{\left| \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -11 \end{pmatrix} \right|}{\left| \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix} \right|} = \frac{\left| \begin{pmatrix} -50 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right|}{\sqrt{0^2 + 6^2 + 8^2}} = \frac{50}{10} = 5 \text{ LE (Längeneinheiten)}$$

als Abstand zwischen Punkt und Geraden.