Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Vektorrechnung
> Geraden

Aufgabe: Gegeben ist die Gerade g mit:

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Bestimme die Spurpunkte der Geraden. Zeichne die Gerade ein in ein kartesisches x_1-x_2-x_3-Koordinatensystem.

Lösung: I. Zur Ermittlung der <u>Spurpunkte</u> einer Geraden g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$ als Schnittpunkte der Geraden mit den Grundebenen des x_1-x_2-x_3-Koordinatensystems sind die einzelnen Komponenten (Koordinaten) der Geraden(gleichung) jeweils gleich Null zu setzen und aus den drei entstehenden Gleichungen jeweils, falls möglich, der Geradenparameter t zu berechnen. Einsetzen der berechneten Parameter in die Geradengleichung führt zu den Spurpunkten. Im Einzelnen gilt:

Gerade g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$ -> Geradenkomponenten $x_1 = a_1 + tu_1$, $x_2 = a_2 + tu_2$, $x_2 = a_2 + tu_2$ ->

Spurpunkt S_{23} auf der x_2-x_3-Grundebene des Koordinatensystems:

$x_1 = a_1 + tu_1 = 0 \Leftrightarrow tu_1 = -a_1 \Leftrightarrow t = -a_1/u_1$ -> $\vec{OS}_{23} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} - \frac{a_1}{u_1}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ a_2 - \frac{a_1}{u_1}u_2 \\ a_3 - \frac{a_1}{u_1}u_3 \end{pmatrix}$ -> S_{23} ($u_1 \neq 0$)

Spurpunkt S_{13} auf der x_1-x_3-Grundebene des Koordinatensystems:

$x_2 = a_2 + tu_2 = 0 \Leftrightarrow tu_2 = -a_2 \Leftrightarrow t = -a_2/u_2$ -> $\vec{OS}_{13} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} - \frac{a_2}{u_2}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 - \frac{a_2}{u_2}u_1 \\ 0 \\ a_3 - \frac{a_2}{u_2}u_3 \end{pmatrix}$ -> S_{13} ($u_2 \neq 0$)

Spurpunkt S_{12} auf der x_1-x_2-Grundebene des Koordinatensystems:

$x_3 = a_3 + tu_3 = 0 \Leftrightarrow tu_3 = -a_3 \Leftrightarrow t = -a_3/u_3$ -> $\vec{OS}_{12} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} - \frac{a_3}{u_3}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 - \frac{a_3}{u_3}u_1 \\ a_2 - \frac{a_3}{u_3}u_2 \\ 0 \end{pmatrix}$ -> S_{12} ($u_3 \neq 0$)

Der jeweilige Spurpunkt existiert nicht, wenn im Richtungsvektor der Geraden $u_1=0$, $u_2=0$ oder $u_3=0$ gilt. Die Gerade liegt dann parallel zu (oder auf) der Grundebene des x_1-x_2-x_3-Koordinatensystems, hinsichtlich der die Gerade keinen Spurpunkt besitzt. Spurpunkte, deren Komponenten mehr als eine Null enthalten, sind Spurpunkte auf den Achsen oder der Ursprung O(0|0|0) des x_1-x_2-x_3-Koordinatensystems

II. Wir zerteilen die Gerade g: $\overset{->}{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ in die einzelnen Komponenten:

$x_1 = 2 + t$
$x_2 = 1 - t$
$x_3 = t$

und bestimmen die Spurpunkte (nach dem Schema in I.) wie folgt:

<u>Spurpunkt</u> S_{23}: Nullsetzen der x_1-Komponente der Geraden g führt auf die Gleichung bzw. die Gleichungsumformungen:

$x_1 = 2 + t = 0 \Leftrightarrow 2 + t = 0 \Leftrightarrow t = -2$.

Einsetzen des gefundenen Parameters t=-2 in die Geradengleichung von g ergibt:

g -> $\overset{->}{OS}_{23} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ -> S_{23}(0|3|-2).

<u>Spurpunkt</u> S_{13}: Nullsetzen der x_2-Komponente der Geraden g führt auf die Gleichung bzw. die Gleichungsumformungen:

$x_2 = 1 - t = 0 \Leftrightarrow 1 - t = 0 \Leftrightarrow t = 1$.

Einsetzen des gefundenen Parameters t=1 in die Geradengleichung von g ergibt:

g -> $\overset{->}{OS}_{13} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ -> S_{13}(3|0|1).

<u>Spurpunkt</u> S_{12}: Nullsetzen der x_3-Komponente der Geraden g führt auf die Gleichung bzw. die Gleichungsumformungen:

$x_3 = t = 0 \Leftrightarrow t = 0$.

Einsetzen des gefundenen Parameters t=0 in die Geradengleichung von g ergibt:

g -> $\overset{->}{OS}_{12} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot$ -> S_{12}(1|1|0).

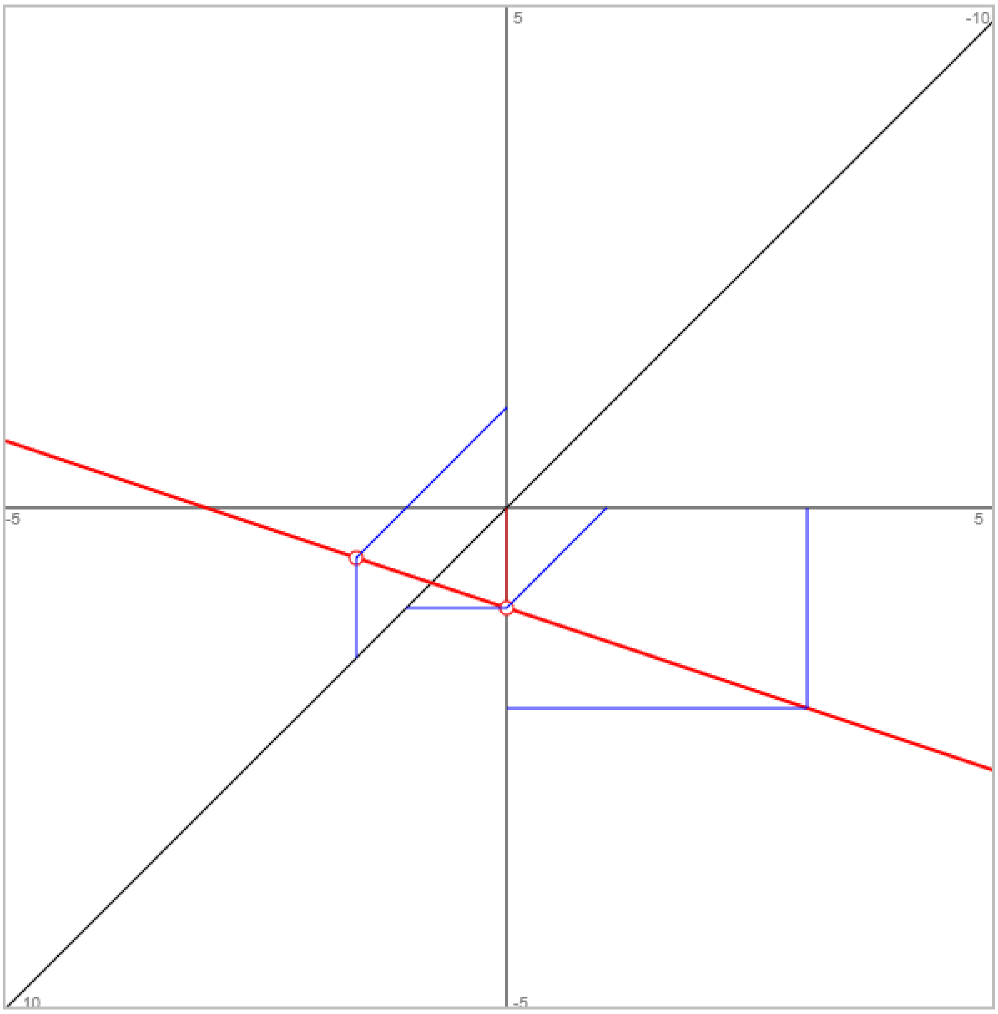
Die Spurpunkte der Geraden g als Schnittpunkte der Geraden mit den Grundebenen des x_1-x_2-x_3-Koordinatensystems lauten also:

Spurpunkt auf der x_2-x_3-Grundebene: S_{23}(0|3|-2)
Spurpunkt auf der x_1-x_3-Grundebene: S_{13}(3|0|1)
Spurpunkt auf der x_1-x_2-Grundebene: S_{12}(1|1|0).

Die Spurpunkte lassen sich auf den Grundebenen des Koordinatensystems besonders leicht ein-tragen (eine Komponente ist ja 0), die Gerade g: $\overset{->}{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ verläuft dann durch alle drei Spurpunkte S_{23}(0|3|-2), S_{13}(3|0|1), S_{12}(1|1|0) (siehe III.).

III. Zusammenfassend gilt für die Gerade g:

Gerade: g: $\vec{x}$ =	$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t * \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$
	$\vec{x} = \vec{a} + t\vec{u}$
Zeichenbereich:	x_2-, x_3-Wert: +/- 5 (-> x_1-Wert)
Stützvektor: $\lvert \vec{OA} \rvert$ =	2.236
Richtungsvektor: $\lvert \vec{u} \rvert$ =	1.732
Schnittpunkt Gerade - x_2-x_3-Ebene:	S_1(0 | 3 | -2)
Schnittpunkt Gerade - x_1-x_3-Ebene:	S_2(3 | 0 | 1)
Schnittpunkt Gerade - x_1-x_2-Ebene:	S_3(2 | 1 | 0)
Schnittwinkel Gerade - x_2-x_3-Ebene:	35.264°
Schnittwinkel Gerade - x_1-x_3-Ebene:	35.264°
Schnittwinkel Gerade - x_1-x_2-Ebene:	35.264°
Abstand Gerade - Ursprung: d(O,g) =	2.16
Abstand Gerade - x_1-Achse: d_1 =	0.707
Abstand Gerade - x_2-Achse: d_2 =	1.414
Abstand Gerade - x_3-Achse: d_3 =	2.121



www.michael-buhlmann.de / 01.2021 / Aufgabe 1285