

Mathematikaufgaben

> Analysis

> Hoch-/Tiefpunkte

Aufgabe: Die ganz rationale Funktion 2. Grades:

$$f(x) = \frac{1}{6}x^2 + \frac{5}{3}x + 3$$

ist auf Hoch- und Tiefpunkte hin zu untersuchen sowie auf Monotonie.

Lösung: I. a) Allgemein ist bei der Untersuchung einer differenzierbaren Funktion $f(x)$ auf Hoch- und Tiefpunkte als Extrempunkte (Punkte mit waagerechter Tangente) zu beachten:

$f'(x) = 0 \Rightarrow x_1, \dots$ als Hoch-, Tief- oder Sattelpunkte der Funktion (notwendige Bedingung)

$f''(x_1) > 0 \Rightarrow$ relatives Minimum/Tiefpunkt $T(x_1|f(x_1))$

$f''(x_1) < 0 \Rightarrow$ relatives Maximum/Hochpunkt $H(x_1|f(x_1))$, ... (hinreichende Bedingung)

bzw.:

$f'(x) = 0 \Rightarrow x_1, \dots$ als Hoch-, Tief- oder Sattelpunkte der Funktion (notwendige Bedingung)

$f'(x_1-h) < 0, f'(x_1) = 0, f'(x_1+h) > 0$ für ein gewisses positives h nahe 0 \Rightarrow Vorzeichenwechsel der Ableitung von $-$ nach $+$ \Rightarrow Tiefpunkt $T(x_1|f(x_1))$

$f'(x_1-h) > 0, f'(x_1) = 0, f'(x_1+h) < 0$ für ein gewisses positives h nahe 0 \Rightarrow Vorzeichenwechsel der Ableitung von $+$ nach $-$ \Rightarrow Hochpunkt $H(x_1|f(x_1))$

$f'(x_1-h) > 0, f'(x_1) = 0, f'(x_1+h) > 0$ für ein gewisses positives h nahe 0 \Rightarrow kein Vorzeichenwechsel \Rightarrow Sattelpunkt $S(x_1|f(x_1))$

$f'(x_1-h) < 0, f'(x_1) = 0, f'(x_1+h) < 0$ für ein gewisses positives h nahe 0 \Rightarrow kein Vorzeichenwechsel \Rightarrow Sattelpunkt $S(x_1|f(x_1))$, ... (hinreichende Bedingung).

Bei einer differenzierbaren Funktion $f(x)$ mit Definitionsbereich $D_f = \mathbf{R}$ ergibt sich als (streng) steigende/fallende Monotonie in (offenen) Monotonieintervallen bei abwechselnden Hoch- und Tiefpunkten x_1, x_2, \dots, x_n mit $x_1 < x_2 < \dots < x_n, x_0$ als Stelle im jeweiligen Monotonieintervall):

Monotonieintervall $(-\infty, x_1)$: $f(x)$ monoton steigend (x_1 als Hochpunkt, $f'(x_0) > 0$) oder monoton fallend (x_1 als Tiefpunkt, $f'(x_0) < 0$)

Monotonieintervall (x_1, x_2) : $f(x)$ monoton fallend (x_1 als Hochpunkt, x_2 als Tiefpunkt, vorheriges Intervall mit steigender Monotonie, $f'(x_0) < 0$) oder monoton steigend (x_1 als Tiefpunkt, x_2 als Hochpunkt, vorheriges Intervall mit fallender Monotonie $f'(x_0) > 0$); ...

Monotonieintervall (x_n, ∞) : $f(x)$ monoton fallend (x_n als Hochpunkt, vorheriges Intervall mit steigender Monotonie $f'(x_0) < 0$) oder monoton steigend (x_n als Tiefpunkt, vorheriges Intervall mit fallender Monotonie, $f'(x_0) > 0$).

Bei einem Sattelpunkt ändert sich die (strenge) Monotonie nicht, so dass die Monotonieintervalle Sattelpunkte immer enthalten.

II. Wir bestimmen den Tiefpunkt als einzigen Extrempunkt der Funktion $f(x) = \frac{1}{6}x^2 + \frac{5}{3}x + 3$, in-

dem wir zunächst die 1. und 2. Ableitung bilden (Ableiten gemäß Summenregel, Potenzregel und Regel mit konstantem Faktor):

$$f'(x) = \frac{1}{3}x + \frac{5}{3}$$

$$f''(x) = \frac{1}{3}$$

Nullsetzen der 1. Ableitung (notwendige Bedingung) führt auf die Gleichungsumformungen:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{3}x + \frac{5}{3} = 0 \Leftrightarrow x + 5 = 0 \Leftrightarrow x = -5,$$

so dass $x=-5$ die Stelle ist, an der die Funktion $f(x)$ eine waagerechte Tangente besitzt. Einsetzen

von $x=-5$ in die 2. Ableitung ergibt:

$$f''(-5) = \frac{1}{3} > 0$$

und mithin den Nachweis eines Tiefpunktes an der Stelle $x=-5$. Wegen

$$f(-5) = \frac{1}{6}(-5)^2 + \frac{5}{3}(-5) + 3 = -\frac{7}{6}$$

besitzt die Funktion $f(x)$ den Tiefpunkt $T(-5|-7/6)$.

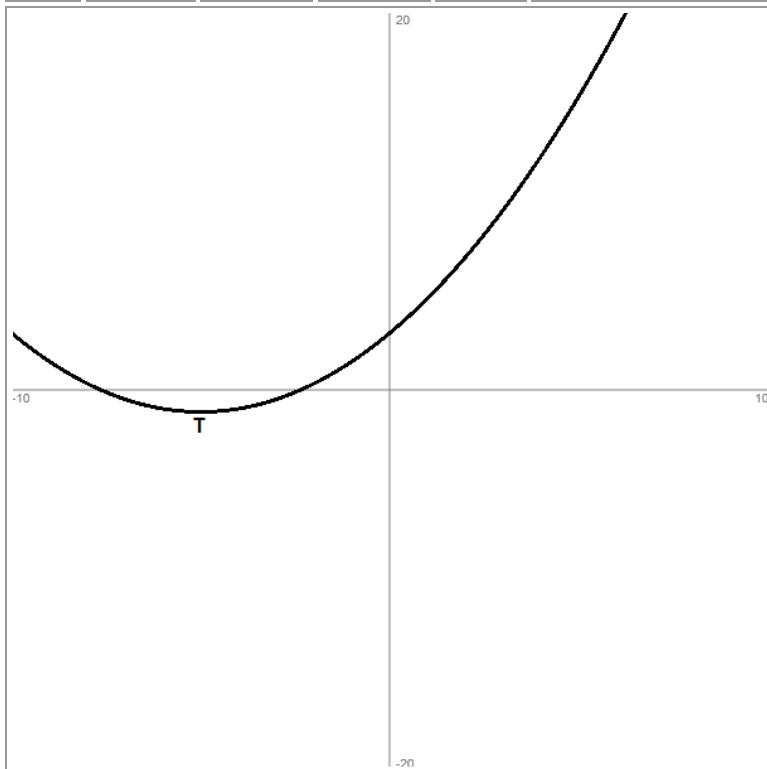
III. Der Tiefpunkt unterteilt den Definitionsbereich $D_f = \mathbf{R}$ der Funktion $f(x)$ in die zwei Monotonieintervalle $(-\infty; -5)$ und $(-5; \infty)$:

$(-\infty; -5)$	$x=-5$	$(-5; \infty)$
↯	Tiefpunkt	↯
f monoton fallend		f monoton steigend

Hinsichtlich der Monotonie der Funktion ist damit festzuhalten: $f(x)$ ist (streng) monoton fallend im Intervall $(-\infty; -5)$ und (streng) monoton steigend im Intervall $(-5; \infty)$.

IV. Wertetabelle, Zeichnung:

x	y = f(x)	f'(x)	f''(x)	f'''(x)	Besondere Kurvenpunkte
-7.64	0	-0.88	0.3333	0	Nullstelle N(-7.64 0)
-5	-1.1667	0	0.3333	0	Tiefpunkt T(-5 -1.17)
-2.35	0	0.8833	0.3333	0	Nullstelle N(-2.35 0)
0	3	1.6667	0.3333	0	Schnittpunkt $S_y(0 3)$



www.michael-buhlmann.de / 04.2018 / Aufgabe 554