Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Analysis
> Hoch-/Tiefpunkte

Aufgabe: Die ganz rationale Funktion 3. Grades:

$$f(x) = x^3 - 3x^2$$

ist auf Hoch- und Tiefpunkte hin zu untersuchen sowie auf Monotonie.

Lösung: I. a) Allgemein ist bei der Untersuchung einer differenzierbaren Funktion f(x) auf Hoch- und Tiefpunkte als Extrempunkte (Punkte mit waagerechter Tangente) zu beachten:

f'(x) = 0 => x_1, … als Hoch-, Tief- oder Sattelpunkte der Funktion (notwendige Bedingung)

f''(x_1) > 0 => relatives Minimum/Tiefpunkt T(x_1|f(x_1))
f''(x_1) < 0 => relatives Maximum/Hochpunkt H(x_1|f(x_1)), … (hinreichende Bedingung)

bzw.:

f'(x) = 0 => x_1, … als Hoch-, Tief- oder Sattelpunkte der Funktion (notwendige Bedingung)

f'(x_1-h)<0, f'(x_1)=0, f'(x_1+h)>0 für ein gewisses positives h nahe 0 => Vorzeichenwechsel der Ableitung von – nach + => Tiefpunkt T(x_1|f(x_1))
f'(x_1-h)>0, f'(x_1)=0, f'(x_1+h)<0 für ein gewisses positives h nahe 0 => Vorzeichenwechsel der Ableitung von + nach – => Hochpunkt H(x_1|f(x_1))
f'(x_1-h)>0, f'(x_1)=0, f'(x_1+h)>0 für ein gewisses positives h nahe 0 => kein Vorzeichenwechsel => Sattelpunkt S(x_1|f(x_1))
f'(x_1-h)<0, f'(x_1)=0, f'(x_1+h)<0 für ein gewisses positives h nahe 0 => kein Vorzeichenwechsel => Sattelpunkt S(x_1|f(x_1)), … (hinreichende Bedingung).

Bei einer differenzierbaren Funktion f(x) mit Definitionsbereich D_f = **R** ergibt sich als (streng) steigende/fallende Monotonie in (offenen) Monotonieintervallen bei abwechselnden Hoch- und Tiefpunkten $x_1, x_2, …, x_n$ mit $x_1 < x_2 < … < x_n$, x_0 als Stelle im jeweiligen Monotonieintervall):

Monotonieintervall (-∞, x_1): f(x) monoton steigend (x_1 als Hochpunkt, f'(x_0)>0) oder monoton fallend (x_1 als Tiefpunkt, f'(x_0)<0)
Monotonieintervall (x_1, x_2): f(x) monoton fallend (x_1 als Hochpunkt, x_2 als Tiefpunkt, vorheriges Intervall mit steigender Monotonie, f'(x_0)<0) oder monoton steigend (x_1 als Tiefpunkt, x_2 als Hochpunkt, vorheriges Intervall mit fallender Monotonie f'(x_0)>0); …
Monotonieintervall (x_n, ∞): f(x) monoton fallend (x_n als Hochpunkt, vorheriges Intervall mit steigender Monotonie f'(x_0)<0) oder monoton steigend (x_n als Tiefpunkt, vorheriges Intervall mit fallender Monotonie, f'(x_0)>0).

Bei einem Sattelpunkt ändert sich die (strenge) Monotonie nicht, so dass die Monotonieintervalle Sattelpunkte immer enthalten.

II. Wir bestimmen den Hoch- und Tiefpunkt als Extrempunkte der Funktion $f(x) = x^3 - 3x^2$, indem wir zunächst die 1. und 2. Ableitung bilden (Ableiten gemäß Summenregel, Potenzregel und Regel mit konstantem Faktor):

$$f'(x) = 3x^2 - 6x$$
$$f''(x) = 6x - 6.$$

Nullsetzen der 1. Ableitung (notwendige Bedingung) führt auf die Gleichungsumformungen:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow x(3x-6) = 0 \Leftrightarrow x = 0,\ 3x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = 0,\ 3x = 6 \Leftrightarrow x = 0,\ \ x = 2,$$

so dass x=0 und x=2 die Stellen sind, an denen die Funktion f(x) jeweils eine waagerechte Tangente besitzt. Einsetzen von x=0 in die 2. Ableitung ergibt:

$$f''(0) = 6 \cdot 0 - 6 = -6 < 0$$

und mithin den Nachweis eines Hochpunktes an der Stelle x=0. Entsprechend gilt für die Stelle x=2:

$$f''(2) = 6 \cdot 2 - 6 = 6 > 0$$

und damit das Vorhandenseins eines Tiefpunktes. Die y-/Funktionswerte von Hoch- und Tiefpunkt errechnen sich als:

$$f(0) = 0^3 - 3 \cdot 0^2 = 0$$

$$f(2) = 2^3 - 3 \cdot 2^2 = 8 - 12 = -4.$$

Die Funktion f(x) besitzt damit den Hochpunkt H(0|0) und den Tiefpunkt T(2|-4).

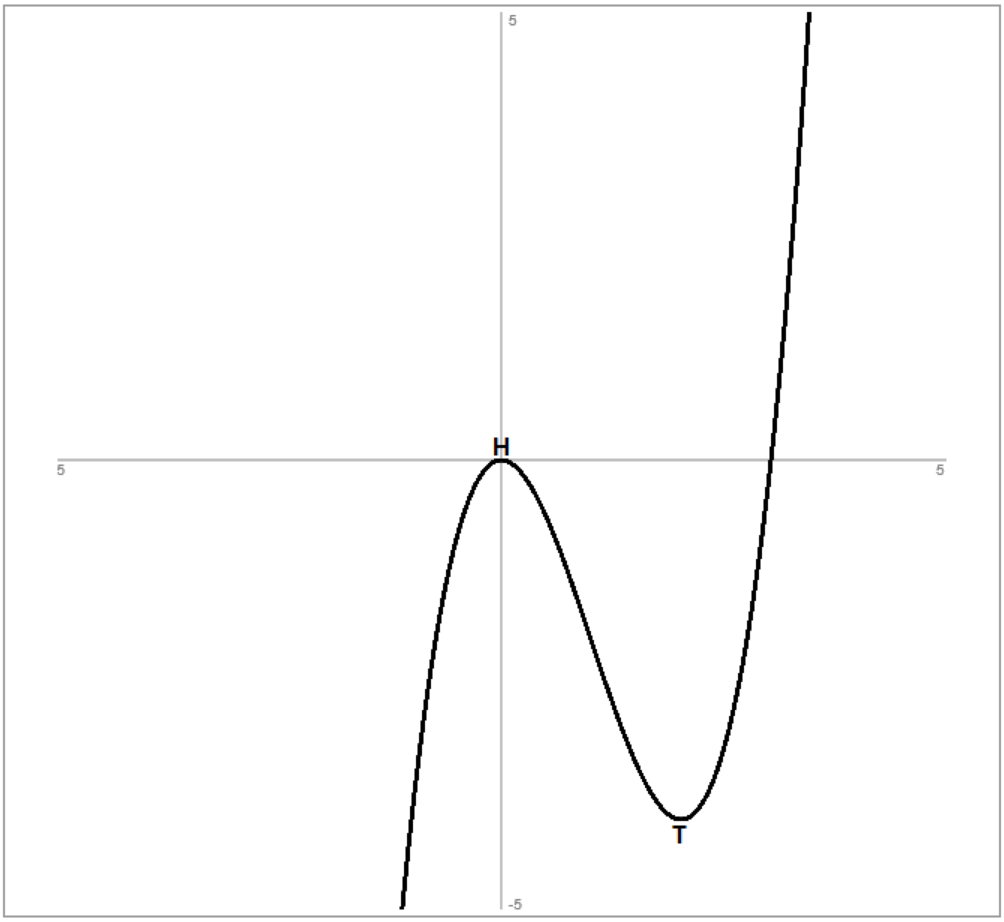
III. Die zwei Extrempunkte unterteilen den Definitionsbereich D_f = **R** der Funktion f(x) in die drei Monotonieintervalle (-∞; 0), (0; 2) und (2; ∞), für die gilt:

Hoch-/Tiefpunkt	**Monotonieintervall**	**Monotonie**
	(-∞; 0)	f(x) ist (streng) monoton steigend
Hochpunkt H(0|0)		
	(0; 2)	f(x) ist (streng) monoton fallend
Tiefpunkt T(2|-4)		
	(2; ∞)	f(x) ist (streng) monoton steigend

Hinsichtlich der <u>Monotonie</u> der Funktion ist damit festzuhalten: f(x) ist (streng) monoton steigend im Intervall (-∞; 0), (streng) monoton fallend im Intervall (0; 2) und (streng) monoton steigend im Intervall (2; ∞).

IV. <u>Wertetabelle, Zeichnung</u>:

x	**y = f(x)**	**f'(x)**	**f''(x)**	**f'''(x)**	**Besondere Kurvenpunkte**
0	0	0	-6	6	Nullstelle N(0|0) = Schnittpunkt S_y(0|0) = Hochpunkt H(0|0)
1	-2	-3	0	6	Wendepunkt W(1|-2)
2	-4	0	6	6	Tiefpunkt T(2|-4)
3	0	9	12	6	Nullstelle N(3|0)



www.michael-buhlmann.de / 04.2018 / Aufgabe 555