Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Analysis
> Hoch-/Tiefpunkte

Aufgabe: Die ganz rationale Funktion 3. Grades:

$$f(x) = \frac{x^3}{3} + x^2 - 8x + 4$$

ist auf Hoch- und Tiefpunkte hin zu untersuchen sowie auf Monotonie.

Lösung: I. a) Allgemein ist bei der Untersuchung einer differenzierbaren Funktion f(x) auf Hoch- und Tiefpunkte als Extrempunkte (Punkte mit waagerechter Tangente) zu beachten:

f'(x) = 0 => x_1, … als Hoch-, Tief- oder Sattelpunkte der Funktion (notwendige Bedingung)

f''(x_1) > 0 => relatives Minimum/Tiefpunkt T(x_1|f(x_1))
f''(x_1) < 0 => relatives Maximum/Hochpunkt H(x_1|f(x_1)), … (hinreichende Bedingung)

bzw.:

f'(x) = 0 => x_1, … als Hoch-, Tief- oder Sattelpunkte der Funktion (notwendige Bedingung)

f'(x_1-h)<0, f'(x_1)=0, f'(x_1+h)>0 für ein gewisses positives h nahe 0 => Vorzeichenwechsel der Ableitung von – nach + => Tiefpunkt T(x_1|f(x_1))
f'(x_1-h)>0, f'(x_1)=0, f'(x_1+h)<0 für ein gewisses positives h nahe 0 => Vorzeichenwechsel der Ableitung von + nach – => Hochpunkt H(x_1|f(x_1))
f'(x_1-h)>0, f'(x_1)=0, f'(x_1+h)>0 für ein gewisses positives h nahe 0 => kein Vorzeichenwechsel => Sattelpunkt S(x_1|f(x_1))
f'(x_1-h)<0, f'(x_1)=0, f'(x_1+h)<0 für ein gewisses positives h nahe 0 => kein Vorzeichenwechsel => Sattelpunkt S(x_1|f(x_1)), … (hinreichende Bedingung).

Bei einer differenzierbaren Funktion f(x) mit Definitionsbereich D_f = **R** ergibt sich als (streng) steigende/fallende <u>Monotonie</u> in (offenen) Monotonieintervallen bei abwechselnden Hoch- und Tiefpunkten x_1, x_2, …, x_n mit $x_1 < x_2 < … < x_n$, x_0 als Stelle im jeweiligen Monotonieintervall):

Monotonieintervall (-∞, x_1): f(x) monoton steigend (x_1 als Hochpunkt, f'(x_0)>0) oder monoton fallend (x_1 als Tiefpunkt, f'(x_0)<0)
Monotonieintervall (x_1, x_2): f(x) monoton fallend (x_1 als Hochpunkt, x_2 als Tiefpunkt, vorheriges Intervall mit steigender Monotonie, f'(x_0)<0) oder monoton steigend (x_1 als Tiefpunkt, x_2 als Hochpunkt, vorheriges Intervall mit fallender Monotonie f'(x_0)>0); …
Monotonieintervall (x_n, ∞): f(x) monoton fallend (x_n als Hochpunkt, vorheriges Intervall mit steigender Monotonie f'(x_0)<0) oder monoton steigend (x_n als Tiefpunkt, vorheriges Intervall mit fallender Monotonie, f'(x_0)>0).

Bei einem Sattelpunkt ändert sich die (strenge) Monotonie nicht, so dass die Monotonieintervalle Sattelpunkte immer enthalten.

II. Wir bestimmen die Punkte mit waagerechter Tangente von $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - 8x + 4$, indem wir zunächst die 1. und 2. Ableitung bilden (Ableiten gemäß Summenregel, Potenzregel und Regel mit konstantem Faktor):

$$f'(x) = x^2 + 2x - 8$$
$$f''(x) = 2x + 2 .$$

Nullsetzen der 1. Ableitung (notwendige Bedingung) führt auf die Gleichungsumformungen:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 8 = 0 \Leftrightarrow x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-8)}}{2 \cdot 1} = \frac{-2 \pm \sqrt{36}}{2} = \frac{-2 \pm 6}{2} \Leftrightarrow \text{ x=-4, x=2,}$$

so dass x=-4 und x=2 die Stellen sind, an denen die Funktion f(x) jeweils eine waagerechte Tangente besitzt. Einsetzen von x=-4 bzw. x=2 in die 2. Ableitung ergibt:

$$f''(-4) = 2\cdot(-4)+2 = -6 < 0$$
$$f''(2) = 2\cdot 2+2 = 6 > 0\,,$$

und damit wegen:

$$f(-4) = \frac{1}{3}(-4)^3 + (-4)^2 - 8\cdot(-4)+4 = \frac{128}{3}$$
$$f(2) = \frac{1}{3}2^3 + 2^2 - 8\cdot 2+4 = -\frac{16}{3}$$

die Existenz des Hochpunkts H(-4|128/3) und des Tiefpunkts T(2|-16/3) der Funktion f(x).

III. Die zwei Extrempunkte unterteilen den Definitionsbereich D_f = **R** der Funktion f(x) in die drei Monotonieintervalle (-∞; -4), (-4; 2) und (2; ∞), für die gilt:

<table>
<tr><th>Hoch-/Tiefpunkt</th><th>Monotonieintervall</th><th>Monotonie</th></tr>
<tr><td></td><td rowspan="2">(-∞; -4)</td><td rowspan="2">f(x) ist (streng) monoton steigend</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Hochpunkt H(-4|128/3)</td></tr>
<tr><td rowspan="2">(-4; 2)</td><td rowspan="2">f(x) ist (streng) monoton fallend</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Tiefpunkt T(2|-16/3)</td></tr>
<tr><td rowspan="2">(2; ∞)</td><td rowspan="2">f(x) ist (streng) monoton steigend</td></tr>
<tr><td></td></tr>
</table>

Hinsichtlich der Monotonie der Funktion ist damit festzuhalten: f(x) ist (streng) monoton steigend im Intervall (-∞; -4), (streng) monoton fallend im Intervall (-4; 2) und (streng) monoton steigend im Intervall (2; ∞).

IV. Wertetabelle, Zeichnung:

<table>
<tr><th>x</th><th>y = f(x)</th><th>f'(x)</th><th>f''(x)</th><th>f'''(x)</th><th>Besondere Kurvenpunkte</th></tr>
<tr><td>-6.79</td><td>0</td><td>24.5241</td><td>-11.58</td><td>2</td><td>Nullstelle N(-6.79|0)</td></tr>
<tr><td>-4</td><td>30.6667</td><td>0</td><td>-6</td><td>2</td><td>Hochpunkt H(-4|30.67)</td></tr>
<tr><td>-1</td><td>12.6667</td><td>-9</td><td>0</td><td>2</td><td>Wendepunkt W(-1|12.67)</td></tr>
<tr><td>0</td><td>4</td><td>-8</td><td>2</td><td>2</td><td>Schnittpunkt S_y(0|4)</td></tr>
<tr><td>0.55</td><td>0</td><td>-6.5975</td><td>3.1</td><td>2</td><td>Nullstelle N(0.55|0)</td></tr>
<tr><td>2</td><td>-5.3333</td><td>0</td><td>6</td><td>2</td><td>Tiefpunkt T(2|-5.33)</td></tr>
<tr><td>3.25</td><td>0</td><td>9.0625</td><td>8.5</td><td>2</td><td>Nullstelle N(3.25|0)</td></tr>
</table>