**Michael Buhlmann**

# Mathematikaufgaben
## > Analysis
## > Hoch-/Tiefpunkte

---

**Aufgabe**: Die ganz rationale Funktion 3. Grades:

$$f(x) = \frac{x^3}{3} + x^2 - 8x + 4$$

ist auf Hoch- und Tiefpunkte hin zu untersuchen sowie auf Monotonie.

**Lösung**: I. a) Allgemein ist bei der Untersuchung einer differenzierbaren Funktion f(x) auf Hoch- und Tiefpunkte als Extrempunkte (Punkte mit waagerechter Tangente) zu beachten:

f'(x) = 0 => $x_1$, … als Hoch-, Tief- oder Sattelpunkte der Funktion (notwendige Bedingung)

f''($x_1$) > 0 => relatives Minimum/Tiefpunkt T($x_1$|f($x_1$))
f''($x_1$) < 0 => relatives Maximum/Hochpunkt H($x_1$|f($x_1$)) (hinreichende Bedingung)

bzw.:

f'(x) = 0 => $x_1$, … als Hoch-, Tief- oder Sattelpunkte der Funktion (notwendige Bedingung)

f'($x_1$-h)<0, f'($x_1$)=0, f'($x_1$+h)>0 für ein gewisses positives h nahe 0 => Vorzeichenwechsel der Ableitung von – nach + => Tiefpunkt T($x_1$|f($x_1$))
f'($x_1$-h)>0, f'($x_1$)=0, f'($x_1$+h)<0 für ein gewisses positives h nahe 0 => Vorzeichenwechsel der Ableitung von + nach – => Hochpunkt H($x_1$|f($x_1$))
f'($x_1$-h)>0, f'($x_1$)=0, f'($x_1$+h)>0 für ein gewisses positives h nahe 0 => kein Vorzeichenwechsel => Sattelpunkt S($x_1$|f($x_1$))
f'($x_1$-h)<0, f'($x_1$)=0, f'($x_1$+h)<0 für ein gewisses positives h nahe 0 => kein Vorzeichenwechsel => Sattelpunkt S($x_1$|f($x_1$)) (hinreichende Bedingung).

b) Bei einer differenzierbaren Funktion f(x) mit Definitionsbereich $D_f$ =**R** ergibt sich als (streng) steigende/fallende Monotonie in (offenen) Monotonieintervallen bei abwechselnden Hoch- und Tiefpunkten $x_1$, $x_2$, …, $x_n$ mit $x_1 < x_2 < … < x_n$, $x_0$ als Stelle im jeweiligen Monotonieintervall:

Monotonieintervall (-∞, $x_1$): f(x) monoton steigend ($x_1$ als Hochpunkt, f'($x_0$)>0) oder monoton fallend ($x_1$ als Tiefpunkt, f'($x_0$)<0)
Monotonieintervall ($x_1$, $x_2$): f(x) monoton fallend ($x_1$ als Hochpunkt, $x_2$ als Tiefpunkt, vorheriges Intervall mit steigender Monotonie, f'($x_0$)<0) oder monoton steigend ($x_1$ als Tiefpunkt, $x_2$ als Hochpunkt, vorheriges Intervall mit fallender Monotonie f'($x_0$)>0); …
Monotonieintervall ($x_n$, ∞): f(x) monoton fallend ($x_n$ als Hochpunkt, vorheriges Intervall mit steigender Monotonie f'($x_0$)<0) oder monoton steigend ($x_n$ als Tiefpunkt, vorheriges Intervall mit fallender Monotonie, f'($x_0$)>0).

Bei einem Sattelpunkt ändert sich die (strenge) Monotonie nicht, so dass die Monotonieintervalle Sattelpunkte immer enthalten.

II. Wir bestimmen die Punkte mit waagerechter Tangente von $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - 8x + 4$, indem wir zunächst die 1. und 2. Ableitung bilden (Ableiten gemäß Summenregel, Potenzregel und Regel mit konstantem Faktor):

$$f'(x) = x^2 + 2x - 8$$
$$f''(x) = 2x + 2\ .$$

Nullsetzen der 1. Ableitung (notwendige Bedingung) führt auf die Gleichungsumformungen:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 8 = 0 \Leftrightarrow x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-8)}}{2 \cdot 1} = \frac{-2 \pm \sqrt{36}}{2} = \frac{-2 \pm 6}{2} \Leftrightarrow \text{ x=-4, x=2,}$$

so dass x=-4 und x=2 die Stellen sind, an denen die Funktion f(x) jeweils eine waagerechte Tangente besitzt. Einsetzen von x=-4 bzw. x=2 in die 2. Ableitung ergibt:

$f''(-4) = 2 \cdot (-4) + 2 = -6 < 0$
$f''(2) = 2 \cdot 2 + 2 = 6 > 0$,

und damit wegen:

$$f(-4) = \frac{1}{3}(-4)^3 + (-4)^2 - 8 \cdot (-4) + 4 = \frac{128}{3}$$

$$f(2) = \frac{1}{3}2^3 + 2^2 - 8 \cdot 2 + 4 = -\frac{16}{3}$$

die Existenz des Hochpunkts H(-4|128/3) und des Tiefpunkts T(2|-16/3) der Funktion f(x).

III. Die zwei Extrempunkte unterteilen den Definitionsbereich $D_f$ = **R** der Funktion f(x) in die drei Monotonieintervalle (-∞; -4), (-4; 2) und (2; ∞), für die gilt:

<table>
<tr><th>Hoch-/Tiefpunkt</th><th>Monotonieintervall</th><th>Monotonie</th></tr>
<tr><td></td><td rowspan="2">(-∞; -4)</td><td rowspan="2">f(x) ist (streng) monoton steigend</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Hochpunkt H(-4|128/3)</td></tr>
<tr><td rowspan="2">(-4; 2)</td><td rowspan="2">f(x) ist (streng) monoton fallend</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Tiefpunkt T(2|-16/3)</td></tr>
<tr><td rowspan="2">(2; ∞)</td><td rowspan="2">f(x) ist (streng) monoton steigend</td></tr>
<tr><td></td></tr>
</table>

Hinsichtlich der Monotonie der Funktion ist damit festzuhalten: f(x) ist (streng) monoton steigend im Intervall (-∞; -4), (streng) monoton fallend im Intervall (-4; 2) und (streng) monoton steigend im Intervall (2; ∞).

IV. Wertetabelle, Zeichnung:

<table>
<tr><th>x</th><th>y = f(x)</th><th>f'(x)</th><th>f''(x)</th><th>f'''(x)</th><th>Besondere Kurvenpunkte</th></tr>
<tr><td>-6.79</td><td>0</td><td>24.5241</td><td>-11.58</td><td>2</td><td>Nullstelle N(-6.79|0)</td></tr>
<tr><td>-4</td><td>30.6667</td><td>0</td><td>-6</td><td>2</td><td>Hochpunkt H(-4|30.67)</td></tr>
<tr><td>-1</td><td>12.6667</td><td>-9</td><td>0</td><td>2</td><td>Wendepunkt W(-1|12.67)</td></tr>
<tr><td>0</td><td>4</td><td>-8</td><td>2</td><td>2</td><td>Schnittpunkt $S_y$(0|4)</td></tr>
<tr><td>0.55</td><td>0</td><td>-6.5975</td><td>3.1</td><td>2</td><td>Nullstelle N(0.55|0)</td></tr>
<tr><td>2</td><td>-5.3333</td><td>0</td><td>6</td><td>2</td><td>Tiefpunkt T(2|-5.33)</td></tr>
<tr><td>3.25</td><td>0</td><td>9.0625</td><td>8.5</td><td>2</td><td>Nullstelle N(3.25|0)</td></tr>
</table>