Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Analysis
> Hoch-/Tiefpunkte

Aufgabe: Die ganz rationale Funktion 4. Grades:

$$f(x) = \frac{x^3}{4}(10 - x)$$

ist auf Hoch- und Tiefpunkte hin zu untersuchen sowie auf Monotonie.

Lösung: I. a) Allgemein ist bei der Untersuchung einer differenzierbaren Funktion f(x) auf Hoch- und Tiefpunkte als Extrempunkte (Punkte mit waagerechter Tangente) zu beachten:

f'(x) = 0 => x_1, … als Hoch-, Tief- oder Sattelpunkte der Funktion (notwendige Bedingung)

f''(x_1) > 0 => relatives Minimum/Tiefpunkt T(x_1|f(x_1))
f''(x_1) < 0 => relatives Maximum/Hochpunkt H(x_1|f(x_1)), … (hinreichende Bedingung)

bzw.:

f'(x) = 0 => x_1, … als Hoch-, Tief- oder Sattelpunkte der Funktion (notwendige Bedingung)

f'(x_1-h)<0, f'(x_1)=0, f'(x_1+h)>0 für ein gewisses positives h nahe 0 => Vorzeichenwechsel der Ableitung von – nach + => Tiefpunkt T(x_1|f(x_1))
f'(x_1-h)>0, f'(x_1)=0, f'(x_1+h)<0 für ein gewisses positives h nahe 0 => Vorzeichenwechsel der Ableitung von + nach – => Hochpunkt H(x_1|f(x_1))
f'(x_1-h)>0, f'(x_1)=0, f'(x_1+h)>0 für ein gewisses positives h nahe 0 => kein Vorzeichenwechsel => Sattelpunkt S(x_1|f(x_1))
f'(x_1-h)<0, f'(x_1)=0, f'(x_1+h)<0 für ein gewisses positives h nahe 0 => kein Vorzeichenwechsel => Sattelpunkt S(x_1|f(x_1)), … (hinreichende Bedingung).

Bei einer differenzierbaren Funktion f(x) mit Definitionsbereich D_f = **R** ergibt sich als (streng) steigende/fallende Monotonie in (offenen) Monotonieintervallen bei abwechselnden Hoch- und Tiefpunkten x_1, x_2, …, x_n mit $x_1 < x_2 < … < x_n$, x_0 als Stelle im jeweiligen Monotonieintervall):

Monotonieintervall (-∞, x_1): f(x) monoton steigend (x_1 als Hochpunkt, f'(x_0)>0) oder monoton fallend (x_1 als Tiefpunkt, f'(x_0)<0)
Monotonieintervall (x_1, x_2): f(x) monoton fallend (x_1 als Hochpunkt, x_2 als Tiefpunkt, vorheriges Intervall mit steigender Monotonie, f'(x_0)<0) oder monoton steigend (x_1 als Tiefpunkt, x_2 als Hochpunkt, vorheriges Intervall mit fallender Monotonie f'(x_0)>0); …
Monotonieintervall (x_n, ∞): f(x) monoton fallend (x_n als Hochpunkt, vorheriges Intervall mit steigender Monotonie f'(x_0)<0) oder monoton steigend (x_n als Tiefpunkt, vorheriges Intervall mit fallender Monotonie, f'(x_0)>0).

Bei einem Sattelpunkt ändert sich die (strenge) Monotonie nicht, so dass die Monotonieintervalle Sattelpunkte immer enthalten.

II. Wir bestimmen die Punkte mit waagerechter Tangente von $f(x) = \frac{x^3}{4}(10 - x) = -\frac{1}{4}x^4 + \frac{5}{2}x^3$, indem wir zunächst die 1. und 2. Ableitung bilden (Ableiten gemäß Summenregel, Potenzregel und Regel mit konstantem Faktor):

$$f'(x) = -x^3 + \frac{15}{2}x^2$$

$$f''(x) = -3x^2 + 15x\,.$$

Nullsetzen der 1. Ableitung (notwendige Bedingung) führt auf die Gleichungsumformungen:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -x^3 + \frac{15}{2}x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2(-x + 7{,}5) = 0 \Leftrightarrow x^2 = 0,\ -x + 7{,}5 = 0 \Leftrightarrow x = 0,\ \ x = 7{,}5\,,$$

so dass x=0 und x=7,5 die Stellen sind, an denen die Funktion f(x) jeweils eine waagerechte Tangente besitzt. Einsetzen von x=0 in die 2. Ableitung ergibt aber nun:

$$f''(0) = -3\cdot 0^2 + 15\cdot 0 = 0\,,$$

so dass unklar ist, ob bei x=0 ein Hoch-, Tief- oder Sattelpunkt vorliegt. Wir untersuchen daher, ob an dieser Stelle die 1. Ableitung einen Vorzeichenwechsel hat oder nicht und überprüfen für zwei geeignete Stellen x=-1 und x=1 links und rechts der Stelle x=0:

$$f'(-1) = -(-1)^3 + \frac{15}{2}(-1)^2 = 1 + \frac{15}{2} = 8{,}5 > 0$$

$$f'(1) = -1^3 + \frac{15}{2}\cdot 1^2 = -1 + \frac{15}{2} = 6{,}5 > 0\,.$$

Wegen der Positivität der Werte f'(-1) und f'(1) liegt kein Vorzeichenwechsel vor, die Stelle x=0 bezeichnet mithin einen Sattelpunkt S(0|0) mit f(0) = 0.
Die zweite Stelle x=7,5 führt wegen:

$$f''(7{,}5) = -3\cdot 7{,}5^2 + 15\cdot 7{,}5 = -56{,}25 < 0$$

auf das Vorhandensein eines Hochpunktes. Der Funktionswert des Hochpunkts errechnet sich als:

$$f(7{,}5) = \frac{7{,}5^3}{4}(10-7{,}5) = \frac{7{,}5^3}{4}\cdot 2{,}5 \approx 263{,}67\,.$$

Die Funktion f(x) besitzt damit den Hochpunkt H(7,5|263,67).

III. Der Hochpunkt unterteilt den Definitionsbereich D_f = **R** der Funktion f(x) in die zwei Monotonieintervalle (-∞; 7,5) und (7,5; ∞), für die gilt:

Hoch-/Tiefpunkt	**Monotonieintervall**	**Monotonie**
[Sattelpunkt S(0|0)]	(-∞; 7,5)	f(x) ist (streng) monoton steigend
Hochpunkt H(7,5|263,67)		
	(7,5; ∞)	f(x) ist (streng) monoton fallend

Hinsichtlich der <u>Monotonie</u> der Funktion ist damit festzuhalten: f(x) ist (streng) monoton steigend im Intervall (-∞; 7,5) und (streng) monoton fallend im Intervall (7,5; ∞).

IV. <u>Wertetabelle, Zeichnung</u>:

x	y = f(x)	f'(x)	f''(x)	f'''(x)	Besondere Kurvenpunkte
0	0	0	0	15	Nullstelle N(0|0) = Schnittpunkt S_y(0|0) = Sattelpunkt W_S(0|0)
5	156.25	62.5	0	-15	Wendepunkt W(5|156.25)
7.5	263.6719	0	-56.25	-30	Hochpunkt H(7.5|263.67)
10	0	-250	-150	-45	Nullstelle N(10|0)