

# Mathematikaufgaben

## > Analysis

### > Hoch-/Tiefpunkte

---

**Aufgabe:** Die ganz rationale Funktion 4. Grades:

$$f(x) = \frac{x^3}{4}(10 - x)$$

ist auf Hoch- und Tiefpunkte hin zu untersuchen sowie auf Monotonie.

**Lösung:** I. a) Allgemein ist bei der Untersuchung einer differenzierbaren Funktion  $f(x)$  auf Hoch- und Tiefpunkte als Extrempunkte (Punkte mit waagerechter Tangente) zu beachten:

$f'(x) = 0 \Rightarrow x_1, \dots$  als Hoch-, Tief- oder Sattelpunkte der Funktion (notwendige Bedingung)

$f''(x_1) > 0 \Rightarrow$  relatives Minimum/Tiefpunkt  $T(x_1|f(x_1))$

$f''(x_1) < 0 \Rightarrow$  relatives Maximum/Hochpunkt  $H(x_1|f(x_1))$  (hinreichende Bedingung)

bzw.:

$f'(x) = 0 \Rightarrow x_1, \dots$  als Hoch-, Tief- oder Sattelpunkte der Funktion (notwendige Bedingung)

$f'(x_1-h) < 0, f'(x_1) = 0, f'(x_1+h) > 0$  für ein gewisses positives  $h$  nahe  $0 \Rightarrow$  Vorzeichenwechsel der Ableitung von  $-$  nach  $+$   $\Rightarrow$  Tiefpunkt  $T(x_1|f(x_1))$

$f'(x_1-h) > 0, f'(x_1) = 0, f'(x_1+h) < 0$  für ein gewisses positives  $h$  nahe  $0 \Rightarrow$  Vorzeichenwechsel der Ableitung von  $+$  nach  $- \Rightarrow$  Hochpunkt  $H(x_1|f(x_1))$

$f'(x_1-h) > 0, f'(x_1) = 0, f'(x_1+h) > 0$  für ein gewisses positives  $h$  nahe  $0 \Rightarrow$  kein Vorzeichenwechsel  $\Rightarrow$  Sattelpunkt  $S(x_1|f(x_1))$

$f'(x_1-h) < 0, f'(x_1) = 0, f'(x_1+h) < 0$  für ein gewisses positives  $h$  nahe  $0 \Rightarrow$  kein Vorzeichenwechsel  $\Rightarrow$  Sattelpunkt  $S(x_1|f(x_1))$  (hinreichende Bedingung).

b) Bei einer differenzierbaren Funktion  $f(x)$  mit Definitionsbereich  $D_f = \mathbf{R}$  ergibt sich als (streng) steigende/fallende Monotonie in (offenen) Monotonieintervallen bei abwechselnden Hoch- und Tiefpunkten  $x_1, x_2, \dots, x_n$  mit  $x_1 < x_2 < \dots < x_n, x_0$  als Stelle im jeweiligen Monotonieintervall:

Monotonieintervall  $(-\infty, x_1)$ :  $f(x)$  monoton steigend ( $x_1$  als Hochpunkt,  $f'(x_0) > 0$ ) oder monoton fallend ( $x_1$  als Tiefpunkt,  $f'(x_0) < 0$ )

Monotonieintervall  $(x_1, x_2)$ :  $f(x)$  monoton fallend ( $x_1$  als Hochpunkt,  $x_2$  als Tiefpunkt, vorheriges Intervall mit steigender Monotonie,  $f'(x_0) < 0$ ) oder monoton steigend ( $x_1$  als Tiefpunkt,  $x_2$  als Hochpunkt, vorheriges Intervall mit fallender Monotonie  $f'(x_0) > 0$ ); ...

Monotonieintervall  $(x_n, \infty)$ :  $f(x)$  monoton fallend ( $x_n$  als Hochpunkt, vorheriges Intervall mit steigender Monotonie  $f'(x_0) < 0$ ) oder monoton steigend ( $x_n$  als Tiefpunkt, vorheriges Intervall mit fallender Monotonie,  $f'(x_0) > 0$ ).

Bei einem Sattelpunkt ändert sich die (strenge) Monotonie nicht, so dass die Monotonieintervalle Sattelpunkte immer enthalten.

II. Wir bestimmen die Punkte mit waagerechter Tangente von  $f(x) = \frac{x^3}{4}(10 - x) = -\frac{1}{4}x^4 + \frac{5}{2}x^3$ ,

indem wir zunächst die 1. und 2. Ableitung bilden (Ableiten gemäß Summenregel, Potenzregel und Regel mit konstantem Faktor):

$$f'(x) = -x^3 + \frac{15}{2}x^2$$

$$f''(x) = -3x^2 + 15x$$

Nullsetzen der 1. Ableitung (notwendige Bedingung) führt auf die Gleichungsumformungen:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -x^3 + \frac{15}{2}x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2(-x + 7,5) = 0 \Leftrightarrow x^2 = 0, -x + 7,5 = 0 \Leftrightarrow x = 0, x = 7,5,$$

so dass  $x=0$  und  $x=7,5$  die Stellen sind, an denen die Funktion  $f(x)$  jeweils eine waagerechte Tangente besitzt. Einsetzen von  $x=0$  in die 2. Ableitung ergibt aber nun:

$$f''(0) = -3 \cdot 0^2 + 15 \cdot 0 = 0,$$

so dass unklar ist, ob bei  $x=0$  ein Hoch-, Tief- oder Sattelpunkt vorliegt. Wir untersuchen daher, ob an dieser Stelle die 1. Ableitung einen Vorzeichenwechsel hat oder nicht und überprüfen für zwei geeignete Stellen  $x=-1$  und  $x=1$  links und rechts der Stelle  $x=0$ :

$$f'(-1) = -(-1)^3 + \frac{15}{2}(-1)^2 = 1 + \frac{15}{2} = 8,5 > 0$$

$$f'(1) = -1^3 + \frac{15}{2} \cdot 1^2 = -1 + \frac{15}{2} = 6,5 > 0.$$

Wegen der Positivität der Werte  $f'(-1)$  und  $f'(1)$  liegt kein Vorzeichenwechsel vor, die Stelle  $x=0$  bezeichnet mithin einen Sattelpunkt  $S(0|0)$  mit  $f(0) = 0$ .

Die zweite Stelle  $x=7,5$  führt wegen:

$$f''(7,5) = -3 \cdot 7,5^2 + 15 \cdot 7,5 = -56,25 < 0$$

auf das Vorhandensein eines Hochpunktes. Der Funktionswert des Hochpunktes errechnet sich als:

$$f(7,5) = \frac{7,5^3}{4}(10 - 7,5) = \frac{7,5^3}{4} \cdot 2,5 \approx 263,67.$$

Die Funktion  $f(x)$  besitzt damit den Hochpunkt  $H(7,5|263,67)$ .

III. Der Hochpunkt unterteilt den Definitionsbereich  $D_f = \mathbf{R}$  der Funktion  $f(x)$  in die zwei Monotonieintervalle  $(-\infty; 7,5)$  und  $(7,5; \infty)$ , für die gilt:

Hoch-/Tiefpunkt	Monotonieintervall	Monotonie
[Sattelpunkt $S(0 0)$ ]	$(-\infty; 7,5)$	$f(x)$ ist (streng) monoton steigend
Hochpunkt $H(7,5 263,67)$	$(7,5; \infty)$	$f(x)$ ist (streng) monoton fallend

Hinsichtlich der Monotonie der Funktion ist damit festzuhalten:  $f(x)$  ist (streng) monoton steigend im Intervall  $(-\infty; 7,5)$  und (streng) monoton fallend im Intervall  $(7,5; \infty)$ .

IV. Wertetabelle, Zeichnung:

x	y = f(x)	f'(x)	f''(x)	f'''(x)	Besondere Kurvenpunkte
0	0	0	0	15	Nullstelle $N(0 0)$ = Schnittpunkt $S_y(0 0)$ = Sattelpunkt $W_s(0 0)$
5	156.25	62.5	0	-15	Wendepunkt $W(5 156.25)$
7.5	263.6719	0	-56.25	-30	Hochpunkt $H(7.5 263.67)$
10	0	-250	-150	-45	Nullstelle $N(10 0)$

