Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Analysis
> Hoch-/Tief-/Wendepunkte – Monotonie/Krümmung

Aufgabe: Die ganz rationale Funktion 4. Grades:

$$f(x) = 3x^4 - 4x^3$$

ist auf Hoch-, Tief- und Wendepunkte zu untersuchen sowie auf Monotonie und Krümmung.

Lösung: I. a) Allgemein ist bei der Untersuchung einer differenzierbaren Funktion f(x) auf Hoch- und Tiefpunkte als Extrempunkte (Punkte mit waagerechter Tangente) zu beachten:

f'(x) = 0 => x_1, … als Hoch-, Tief- oder Sattelpunkte der Funktion (notwendige Bedingung)

f''(x_1) > 0 => relatives Minimum/Tiefpunkt T(x_1|f(x_1))
f''(x_1) < 0 => relatives Maximum/Hochpunkt H(x_1|f(x_1)) (hinreichende Bedingung)

bzw.:

f'(x) = 0 => x_1, … als Hoch-, Tief- oder Sattelpunkte der Funktion (notwendige Bedingung)

f'(x_1-h)<0, f'(x_1)=0, f'(x_1+h)>0 für ein gewisses positives h nahe 0 => Vorzeichenwechsel der Ableitung von – nach + => Tiefpunkt T(x_1|f(x_1))
f'(x_1-h)>0, f'(x_1)=0, f'(x_1+h)<0 für ein gewisses positives h nahe 0 => Vorzeichenwechsel der Ableitung von + nach – => Hochpunkt H(x_1|f(x_1))
f'(x_1-h)>0, f'(x_1)=0, f'(x_1+h)>0 für ein gewisses positives h nahe 0 => kein Vorzeichenwechsel => Sattelpunkt S(x_1|f(x_1))
f'(x_1-h)<0, f'(x_1)=0, f'(x_1+h)<0 für ein gewisses positives h nahe 0 => kein Vorzeichenwechsel => Sattelpunkt S(x_1|f(x_1)) (hinreichende Bedingung).

b) Bei der Untersuchung einer differenzierbaren Funktion f(x) auf Wendepunkte ist folgendermaßen vorzugehen:

f''(x) = 0 => x_1, … als Wendepunkte der Funktion (notwendige Bedingung)

f'''(x_1) > 0 => Wendepunkt W(x_1|f(x_1)) mit Übergang von einer Rechts- zu einer Linkskrümmung
f'''(x_1) < 0 => Wendepunkt W(x_1|f(x_1)) mit Übergang von einer Links- zu einer Rechtskrümmung (hinreichende Bedingung)

bzw.:

f''(x) = 0 => x_1, … als Wendepunkte der Funktion (notwendige Bedingung)

f''(x_1-h)<0, f''(x_1)=0, f''(x_1+h)>0 für ein gewisses positives h nahe 0 => Vorzeichenwechsel der Ableitung von – nach + => Wendepunkt W(x_1|f(x_1)) mit Übergang von einer Rechts- zu einer Linkskrümmung
f''(x_1-h)>0, f''(x_1)=0, f''(x_1+h)<0 für ein gewisses positives h nahe 0 => Vorzeichenwechsel der Ableitung von + nach – => Wendepunkt W(x_1|f(x_1)) mit Übergang von einer Links- zu einer Rechtskrümmung (hinreichende Bedingung).

Sattelpunkte sind Wendepunkte mit waagerechter Tangente.

c) Bei einer differenzierbaren Funktion f(x) mit Definitionsbereich D_f =**R** ergibt sich als (streng) steigende/fallende Monotonie in (offenen) Monotonieintervallen bei abwechselnden Hoch- und Tiefpunkten x_1, x_2, …, x_n mit $x_1 < x_2 < … < x_n$, x_0 als Stelle im jeweiligen Monotonieintervall:

Monotonieintervall (-∞, x_1): f(x) monoton steigend (x_1 als Hochpunkt, f'(x_0)>0) oder monoton fallend (x_1 als Tiefpunkt, f'(x_0)<0)
Monotonieintervall (x_1, x_2): f(x) monoton fallend (x_1 als Hochpunkt, x_2 als Tiefpunkt, vorheriges Intervall mit steigender Monotonie, f'(x_0)<0) oder monoton steigend (x_1 als Tiefpunkt, x_2 als Hochpunkt, vorheriges Intervall mit fallender Monotonie f'(x_0)>0); …
Monotonieintervall (x_n, ∞): f(x) monoton fallend (x_n als Hochpunkt, vorheriges Intervall mit steigender Monotonie f'(x_0)<0) oder monoton steigend (x_n als Tiefpunkt, vorheriges Intervall mit fallender Monotonie, f'(x_0)>0).

Bei einem Sattelpunkt ändert sich die (strenge) Monotonie nicht, so dass die Monotonieintervalle Sattelpunkte immer enthalten.

d) Bei einer differenzierbaren Funktion f(x) mit Definitionsbereich D_f =**R** folgt aus den Wendepunkten x_1, x_2, …, x_n mit $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$, x_0 als Stelle im jeweiligen Krümmungsintervall eine Links- oder Rechtskrümmung gemäß:

Krümmungsintervall (-∞, x_1): f(x) links gekrümmt (x_1 als Wendepunkt, f“(x_0)>0, Tiefpunkt x_0) oder rechts gekrümmt (x_1 als Wendepunkt, f“(x_0)<0, Hochpunkt x_0)
Krümmungsintervall (x_1, x_2): f(x) rechts gekrümmt (x_1 als Wendepunkt, x_2 als Wendepunkt, vorheriges Intervall mit Linkskrümmung, f“(x_0)<0, Hochpunkt x_0) oder links gekrümmt (x_1 als Wendepunkt, x_2 als Wendepunkt, vorheriges Intervall mit Rechtskrümmung f“(x_0)>0, Tiefpunkt x_0); …
Krümmungsintervall (x_n, ∞): f(x) rechts gekrümmt (x_n als Wendepunkt, vorheriges Intervall mit Linkskrümmung, f“(x_0)<0, Hochpunkt x_0) oder links gekrümmt (x_n als Wendepunkt, vorheriges Intervall mit Rechtskrümmung f“(x_0)>0, Tiefpunkt x_0).

II. Wir berechnen die 1., 2. und 3. Ableitung (Ableiten gemäß Summenregel, Potenzregel und Regel mit konstantem Faktor):

$$f'(x) = 12x^3 - 12x^2$$
$$f''(x) = 36x^2 - 24x$$
$$f'''(x) = 72x - 24.$$

III. Hoch-, Tiefpunkte: Nullsetzen der 1. Ableitung (notwendige Bedingung) führt auf die Gleichungsumformungen:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 12x^3 - 12x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2(12x - 12) = 0 \Leftrightarrow x^2 = 0 \vee 12x - 12 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 1,$$

so dass x=0 und x=1 die Stellen sind, an denen die Funktion f(x) jeweils eine waagerechte Tangente besitzt. Einsetzen von x=0 in die 2. Ableitung (hinreichende Bedingung) ergibt aber nun:

$$f''(0) = 36 \cdot 0^2 - 24 \cdot 0 = 0,$$

so dass unklar ist, ob bei x=0 ein Hoch-, Tief- oder Sattelpunkt vorliegt. Wir untersuchen daher die Stelle x=0 im Abschnitt über Wendepunkte. Die zweite Stelle x=1 führt wegen:

$$f''(1) = 36 \cdot 1^2 - 24 \cdot 1 = 12 > 0$$

auf das Vorhandensein eines Tiefpunkts. Der Funktionswert des Tiefpunkts errechnet sich als:

$$f(1) = 4 \cdot 1^4 - 4 \cdot 1^3 = -1.$$

Die Funktion f(x) besitzt damit den Tiefpunkt T(1|-1).

IV. Wendepunkte: Nullsetzen der 2. Ableitung (notwendige Bedingung) führt auf die Gleichungsumformungen:

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 36x^2 - 24x = 0 \Leftrightarrow x(36x - 24) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee 36x - 24 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = \frac{2}{3}$$

mit den Wendestellen x=0 und x=2/3 auf Grund von:

$$f'''(0) = 72 \cdot 0 - 24 = -24 < 0$$
$$f'''(\frac{2}{3}) = 72 \cdot \frac{2}{3} - 24 = 24 > 0$$

(hinreichende Bedingung). An der Stelle x=0 geht also – wenn wir die Kurve der Funktion f(x) im Koordinatensystem von links nach rechts durchlaufen – eine Links- in eine Rechtskrümmung über, an der x=2/3 eine Rechts- in eine Linkskrümmung. Die entsprechenden Funktionswerte lauten:

$$f(0) = 4 \cdot 0^4 - 4 \cdot 0^3 = 0$$
$$f(\frac{2}{3}) = 4 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^4 - 4 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^3 = -\frac{16}{27},$$

so dass sich – wegen der waagerechten Tangente der Funktion f(x) an der Stelle x=0 – der Sattelpunkt $W_1(0|0)$ und der Wendepunkt $W_2(2/3|-16/27)$ ergeben.

V. Der Tiefpunkt T(1|-1) unterteilt den Definitionsbereich D_f = **R** der Funktion f(x) in die zwei Monotonieintervalle (-∞; 1) und (1; ∞), für die gilt:

Hoch-/Tiefpunkt	**Monotonieintervall**	**Monotonie**
[Sattelpunkt S(0|0)]	(-∞; 1)	f(x) ist (streng) monoton fallend
Tiefpunkt T(1|-1)		
	(1; ∞)	f(x) ist (streng) monoton steigend

Hinsichtlich der <u>Monotonie</u> der Funktion ist damit festzuhalten: f(x) ist (streng) monoton fallend im Intervall (-∞; 1) und (streng) monoton steigend im Intervall (1; ∞).

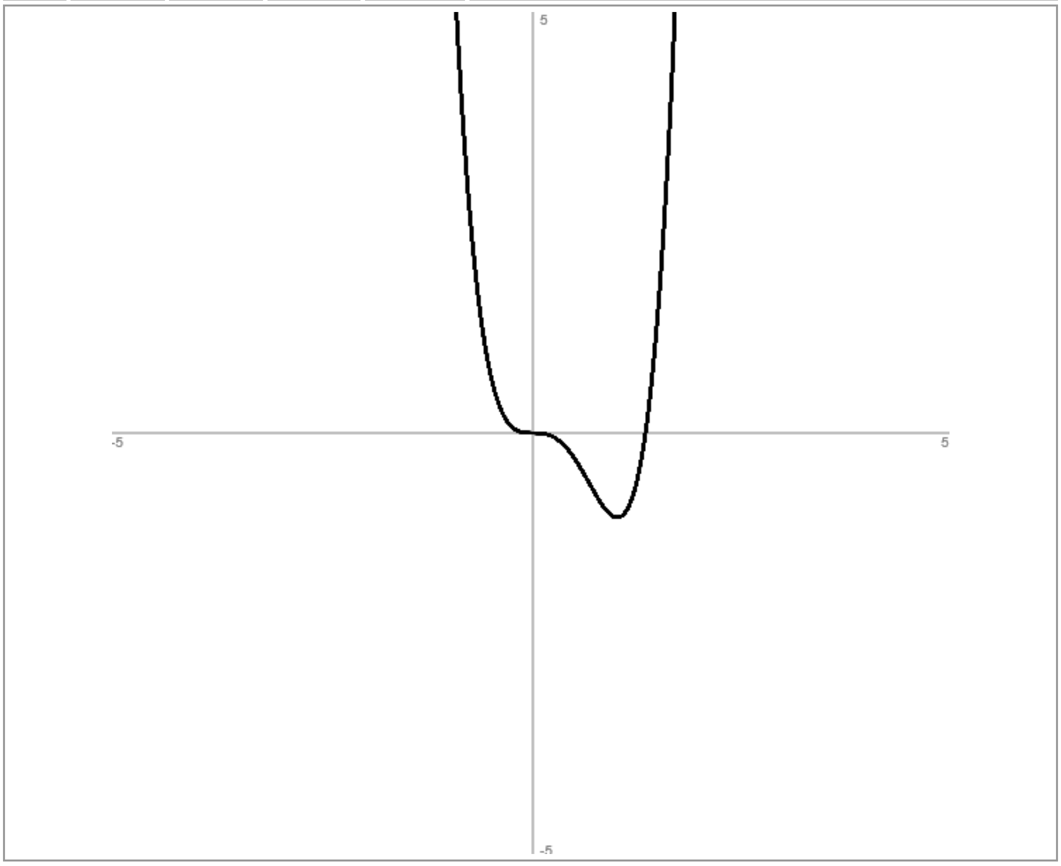
VI. Die Wendepunkte W_1(0|0) (als Sattelpunkt) und W_2(2/3|-32/81) unterteilen den Definitionsbereich D_f = **R** der Funktion f(x) in die drei Krümmungsintervalle (-∞; 0), (0; 2/3) und (2/3; ∞) mit:

Wendepunkt	**Krümmungsintervall**	**Krümmung**
	(-∞; 0)	f(x) ist links gekrümmt
Sattelpunkt W_1(0|0)	(0; 2/3)	f(x) ist rechts gekrümmt
Wendepunkt W_2(2/3|-16/27)	(2/3; ∞)	f(x) ist links gekrümmt
Tiefpunkt T(1|-1)		

Hinsichtlich der <u>Krümmung</u> ergibt sich also: f(x) ist links gekrümmt auf den Intervallen (-∞; 0) und (2/3; ∞) sowie rechts gekrümmt auf dem Intervall (0; 2/3).

VII. <u>Wertetabelle, Zeichnung</u>:

x	**y = f(x)**	**f'(x)**	**f''(x)**	**f'''(x)**	**Besondere Kurvenpunkte**
x	**f(x)**	**f'(x)**	**f''(x)**	**f'''(x)**	**Besondere Kurvenpunkte**
0	0	0	0	-24	Nullstelle N(0|0) = Schnittpunkt S_y(0|0) = Sattelpunkt W_S(0|0)
0.67	-0.5985	-1.7776	0.0804	24.24	Wendepunkt W(0.67|-0.6)
1	-1	0	12	48	Tiefpunkt T(1|-1)
1.34	0	7.326	32.4816	72.48	Nullstelle N(1.34|0)



www.michael-buhlmann.de / 11.2019 / Aufgabe 891