Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Analysis
> Integral

Aufgabe: Gegeben ist die Funktion f(x) = 2·sin(x). Die Fläche zwischen f(x) und x-Achse im Intervall [0;π/2] soll ermittelt werden mittels geeigneter Unter- und Obersummen.

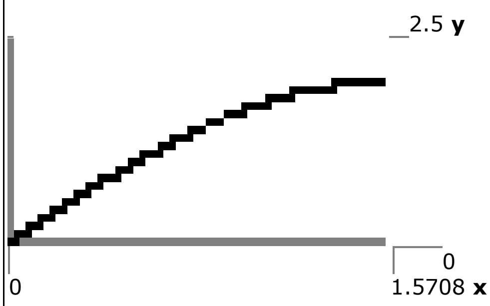
Lösung: I. Allgemein führen wir zunächst folgende Überlegungen durch: Bei Funktionen f(x), die auf einem Intervall [a,b] nicht negativ sind, ist mit der Stammfunktion F(x) der Wert des bestimmten Integrals

$$A = \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

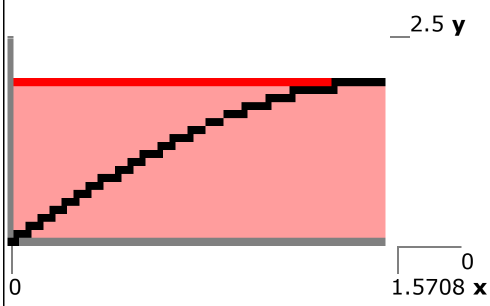
identisch mit dem Inhalt der Fläche A zwischen Funktion f(x) und x-Achse. In solch einem Fall hat sich eingebürgert, die Identität von Fläche und Integral mit Unter- und Obersummen darzustellen, mithin das Integral als ganzheitlichen (auf das Intervall bezogenen) Grenzprozess von sich der Fläche annähernden Rechtecken einzuführen. Hier spielen die Unter- und Obersummen eine wichtige Rolle, die auf Teilintervalle bezogene Rechtecke unterhalb bzw. auch oberhalb der Funktion aufsummieren und die sich im Grenzprozess als identisch erweisen.

II. Gegeben ist also die Funktion 2·sin(x). Die Fläche zwischen f(x) und x-Achse soll im Intervall [0;π/2] ermittelt werden. Dazu unterteilen wir das Intervall in n Teile der Breite h = $\frac{\pi/2-0}{n} = \frac{\pi}{2n}$. Das erste Teilintervall beginnt bei x_0=0, das n-te Teilintervall endet bei x_n = π/2. In jedem Teilintervall [x_i; x_{i+1}] = [$i \cdot \frac{\pi}{2n}$; $(i+1)\frac{\pi}{2n}$], i = 0, 1, … n-1, nimmt wegen der steigenden Monotonie die Funktion f(x) ihr Minimum bei x_i mit m_i = f(x_i) = f($i \cdot \frac{\pi}{2n}$) = $2 \cdot \sin\left(i \cdot \frac{\pi}{2n}\right)^2$, ihr Maximum bei x_{i+1} mit M_i = f(x_{i+1}) = f($(i+1)\frac{\pi}{2n}$) = $2 \cdot \sin\left((i+1)\frac{\pi}{2n}\right)^2$ an, i = 0, 1, … n-1. Untersumme U_n und Obersumme O_n haben dann folgendes Aussehen:

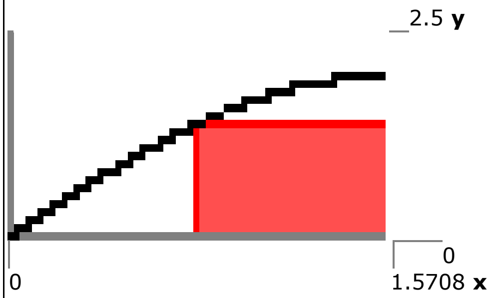
Untersumme: U_1 = 0
(Prozentuale) Abweichung: |A-U_1| = 2, |A-U_1|/A = 100%
Graph: y = f(x) = 2·sin(x), U_1



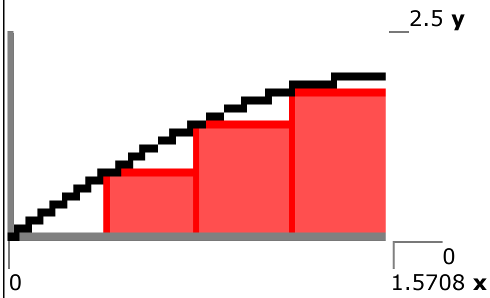
Obersumme: O_1 = 3.1416
(Prozentuale) Abweichung: |A-O_1| = 1.1416, |A-O_1|/A = 57.08%
Graph: y = f(x) = 2*Math.sin(x), O_1



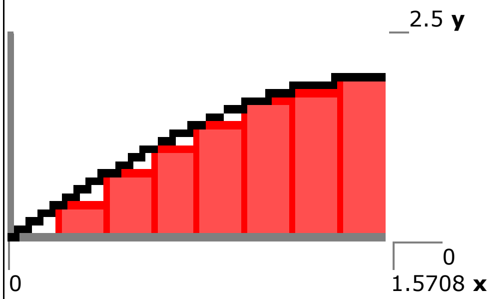
Untersumme: $U_2 = 1.1107$
(Prozentuale) Abweichung: $|A-U_2| = 0.8893$, $|A-U_2|/A = 44.46\%$
Graph: $y = f(x) = 2\cdot\sin(x)$, U_2



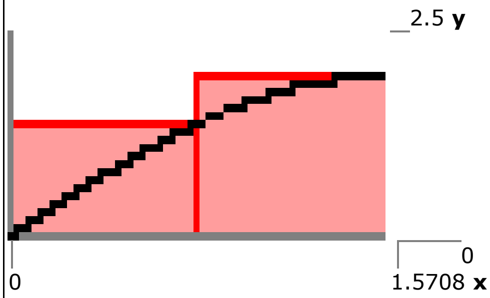
Untersumme: $U_4 = 1.5815$
(Prozentuale) Abweichung: $|A-U_4| = 0.4185$, $|A-U_4|/A = 20.92\%$
Graph: $y = f(x) = 2\cdot\sin(x)$, U_4



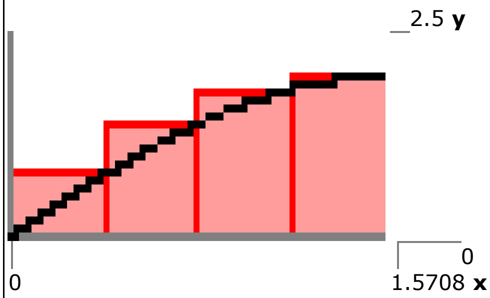
Untersumme: $U_8 = 1.7972$
(Prozentuale) Abweichung: $|A-U_8| = 0.2028$, $|A-U_8|/A = 10.14\%$
Graph: $y = f(x) = 2\cdot\sin(x)$, U_8



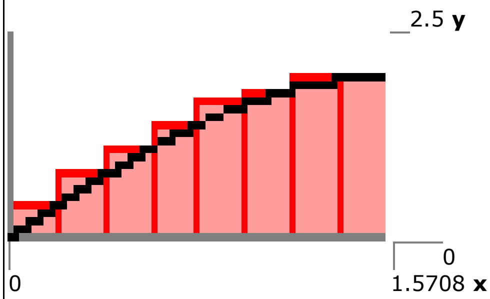
Obersumme: $O_2 = 2.6811$
(Prozentuale) Abweichung: $|A-O_2| = 0.6811$, $|A-O_2|/A = 34.05\%$
Graph: $y = f(x) = 2\cdot\sin(x)$, O_2



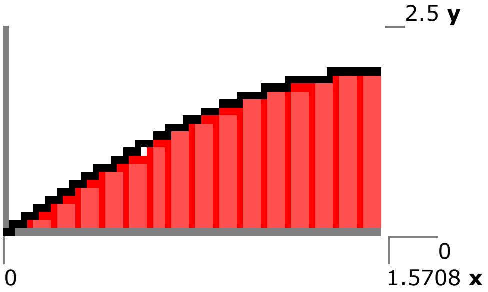
Obersumme: $O_4 = 2.3666$
(Prozentuale) Abweichung: $|A-O_4| = 0.3666$, $|A-O_4|/A = 18.33\%$
Graph: $y = f(x) = 2\cdot\sin(x)$, O_4



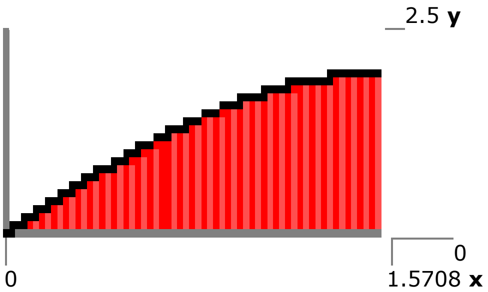
Obersumme: $O_8 = 2.1875$
(Prozentuale) Abweichung: $|A-O_8| = 0.1875$, $|A-O_8|/A = 9.37\%$
Graph: $y = f(x) = 2\cdot\sin(x)$, O_8



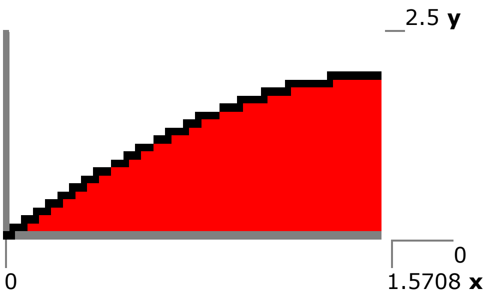
Untersumme: $U_{16} = 1.9002$
(Prozentuale) Abweichung: $|A-U_{16}| = 0.0998$,
$|A-U_{16}|/A = 4.99\%$
Graph: $y = f(x) = 2 \cdot \sin(x)$, U_{16}



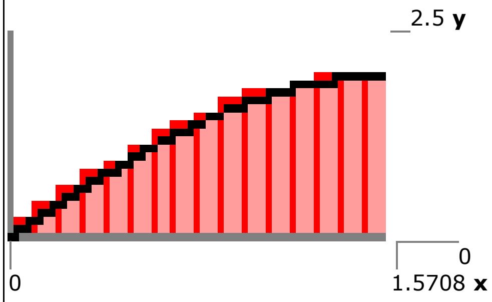
Untersumme: $U_{32} = 1.9505$
(Prozentuale) Abweichung: $|A-U_{32}| = 0.0495$,
$|A-U_{32}|/A = 2.47\%$
Graph: $y = f(x) = 2 \cdot \sin(x)$, U_{32}



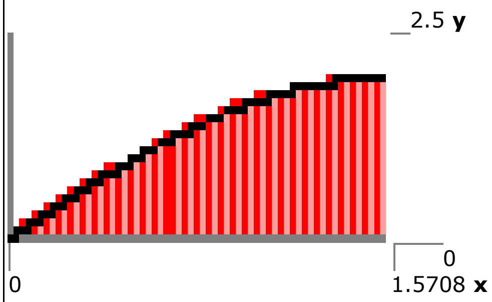
Untersumme: $U_{64} = 1.9754$
(Prozentuale) Abweichung: $|A-U_{64}| = 0.0246$,
$|A-U_{64}|/A = 1.23\%$
Graph: $y = f(x) = 2 \cdot \sin(x)$, U_{64}



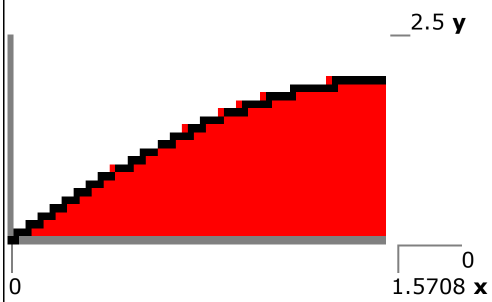
Obersumme: $O_{16} = 2.0953$
(Prozentuale) Abweichung: $|A-O_{16}| = 0.0953$,
$|A-O_{16}|/A = 4.76\%$
Graph: $y = f(x) = 2 \cdot \sin(x)$, O_{16}



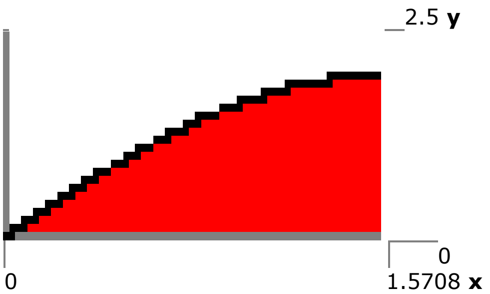
Obersumme: $O_{32} = 2.0456$
(Prozentuale) Abweichung: $|A-O_{32}| = 0.0456$,
$|A-O_{32}|/A = 2.28\%$
Graph: $y = f(x) = 2 \cdot \sin(x)$, O_{32}



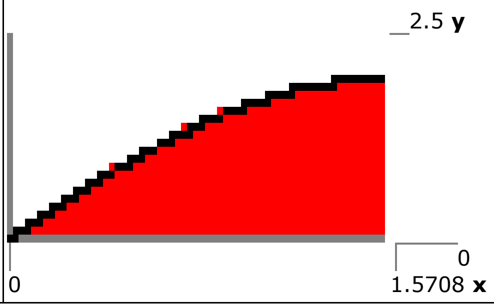
Obersumme: $O_{64} = 2.0204$
(Prozentuale) Abweichung: $|A-O_{64}| = 0.0204$,
$|A-O_{64}|/A = 1.02\%$
Graph: $y = f(x) = 2 \cdot \sin(x)$, O_{64}



Untersumme: $U_{128} = 1.9877$
(Prozentuale) Abweichung: $|A-U_{128}| = 0.0123$, $|A-U_{128}|/A = 0.61\%$
Graph: $y = f(x) = 2\cdot\sin(x)$, U_{128}



Obersumme: $O_{128} = 2.0077$
(Prozentuale) Abweichung: $|A-O_{128}| = 0.0077$, $|A-O_{128}|/A = 0.39\%$
Graph: $y = f(x) = 2\cdot\sin(x)$, O_{128}



Grenzwert von Unter- und Obersumme sind gleich und identisch mit dem gesuchten Flächeninhalt: A = 2.

III. Wir überprüfen den durch Unter- und Obersummen berechneten Flächeninhalt noch, indem wir über die Stammfunktion F(x) von f(x) integrieren:

$$A = \int_0^{\pi/2} f(x)dx = \int_0^{\pi/2} 2\cdot\sin(x)dx = 2\int_0^{\pi/2}\sin(x)dx = 2[-\cos(x)]_0^{\pi/2} = 2\left[-\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)+\cos(0)\right] = 2\cdot 1 = 2\,.$$

www.michael-buhlmann.de / 12.2015 / Aufgabe 144