

Mathematikaufgaben

> Analysis

> Bestimmtes Integral

Aufgabe: Zu berechnen ist das bestimmte Integral

$$\int_1^4 2x\sqrt{3x} dx.$$

Lösung: I. Wir bestimmen zunächst unter Verwendung der Faktor- und Potenzregel für das Aufleiten:

a) $\int rf'(x)dx = r \int f(x)dx$ (Faktorregel)

b) $\int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1}$ ($n \neq -1$) (Potenzregel)

zum Integranden $f(x) = 2x\sqrt{3x}$ die Stammfunktion $F(x)$ als:

$$F(x) = \int 2x\sqrt{3x} dx = 2\sqrt{3} \int x\sqrt{x} dx = 2\sqrt{3} \int x^1 \cdot x^{\frac{1}{2}} dx = 2\sqrt{3} \int x^{\frac{3}{2}} dx = 2\sqrt{3} \cdot \frac{1}{\frac{5}{2}} x^{\frac{5}{2}} = \frac{4}{5} \sqrt{3} \cdot x^{\frac{5}{2}}.$$

II. Wir berechnen unter Verwendung der Stammfunktion das bestimmte Integral:

$$\int_1^4 2x\sqrt{3x} dx = \left[\frac{4}{5} \sqrt{3} \cdot x^{\frac{5}{2}} \right]_0^4 = \frac{4}{5} \sqrt{3} \cdot 4^{\frac{5}{2}} - \frac{4}{5} \sqrt{3} \cdot 1^{\frac{5}{2}} = \frac{4}{5} \sqrt{3} \cdot 32 - \frac{4}{5} \sqrt{3} \cdot 1 = \frac{4}{5} \sqrt{3} \cdot 31 = \frac{124}{5} \sqrt{3}$$

gemäß der nachstehenden Vorgehensweise:

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

(Stammfunktion bestimmen, Einsetzen der oberen und unteren Grenze des bestimmten Integrals in die Stammfunktion, Ausrechnen der Differenz zwischen Stammfunktionswert der oberen und Stammfunktionswert der unteren Grenze).