Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Analysis
> Bestimmtes Integral

Aufgabe: Zu berechnen ist das bestimmte Integral

$$\int_1^2 \frac{x^2+3x+2}{2x^3}\,dx.$$

Lösung: Wir berechnen unter Verwendung der Summen-, Faktor- und Potenzregel für das Aufleiten:

a) $\int (f(x)+g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$ (Summenregel)

b) $\int rf(x)dx = r\int f(x)dx$ (Faktorregel)

c) $\int x^n dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1}$ (n ≠ -1), $\int x^{-1}dx = \ln|x|$ (Potenzregel)

sowie auf Grund der Termumformung des Integranden $\frac{x^2+3x+2}{2x^3} = \frac{x^2}{2x^3}+\frac{3x}{2x^3}+\frac{2}{2x^3} =$ $\frac{1}{2x}+\frac{3}{2x^2}+\frac{1}{x^3}$ (Aufteilung des Bruchs in drei Brüche, wenn der Nenner eine Potenz von x ist) das bestimmte Integral:

$$\int_1^2 \frac{x^2+3x+2}{2x^3}dx = \int_1^2\left(\frac{1}{2x}+\frac{3}{2x^2}+\frac{1}{x^3}\right)dx = \int_1^2\left(\frac{1}{2}x^{-1}+\frac{3}{2}x^{-2}+x^{-3}\right)dx = \left[\frac{1}{2}\ln|x|-\frac{3}{2}x^{-1}-\frac{1}{2}x^{-2}\right]_1^2 =$$

$$\left[\frac{1}{2}\ln|x|-\frac{3}{2x}-\frac{1}{2x^2}\right]_1^2 = \left(\frac{1}{2}\ln|2|-\frac{3}{2\cdot 2}-\frac{1}{2\cdot 2^2}\right)-\left(\frac{1}{2}\ln|1|-\frac{3}{2\cdot 1}-\frac{1}{2\cdot 1^2}\right)=$$

$$\left(\frac{1}{2}\ln 2-\frac{3}{4}-\frac{1}{8}\right)-\left(0-\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\ln 2-\frac{9}{8}+2=\frac{1}{2}\ln 2+\frac{7}{8}=\frac{1}{8}(4\cdot\ln 2+7)$$

(besonderer Wert: ln*1* = 0) gemäß der nachstehenden Vorgehensweise:

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b)-F(a)$$

(Stammfunktion bestimmen, Einsetzen der oberen und unteren Grenze des bestimmten Integrals in die Stammfunktion, Ausrechnen der Differenz zwischen Stammfunktionswert der oberen und Stammfunktionswert der unteren Grenze).

www.michael-buhlmann.de / 12.2015 / Aufgabe 148