

Mathematikaufgaben

> Analysis

> Bestimmtes Integral

Aufgabe: Zu berechnen ist das bestimmte Integral

$$\int_1^e \left(4 - \frac{2}{x}\right) dx.$$

Lösung: I. Wir bestimmen unter Verwendung der Summenregel, der Faktorregel sowie der Potenzregel für das Integrieren:

a) $\int (f(x) + g(x)) dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$ (Summenregel)

b) $\int r f(x) dx = r \int f(x) dx$ (Faktorregel)

c) $\int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1}$ ($n \neq -1$), $\int x^{-1} dx = \ln|x|$ (Potenzregel)

die Stammfunktion der Funktion $f(x) = 4 - \frac{2}{x}$ im bestimmten Integral mit:

$$f(x) = 4 - \frac{2}{x} = 4 - 2x^{-1} \Rightarrow F(x) = 4x - 2 \cdot \ln|x|.$$

II. Das bestimmte Integral errechnet sich mit Hilfe der Stammfunktion als:

$$\int_1^e \left(4 - \frac{2}{x}\right) dx = [4x - 2 \cdot \ln|x|]_1^e = (4e - 2 \ln e) - (4 - 2 \ln 1) = (4e - 2 \cdot 1) - (4 - 2 \cdot 0) = 4e - 2 - 4 = 4e - 6$$

gemäß der nachstehenden Vorgehensweise:

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

(Stammfunktion bestimmen, Einsetzen der oberen und unteren Grenze des bestimmten Integrals in die Stammfunktion, Ausrechnen der Differenz zwischen Stammfunktionswert der oberen und Stammfunktionswert der unteren Grenze).