

Mathematikaufgaben

> Analysis

> Bestimmtes Integral

Aufgabe: Zu berechnen ist das bestimmte Integral

$$\int_5^{10} \left(x - \frac{50}{x^2} \right) dx.$$

Lösung: I. Wir bestimmen unter Verwendung der Summenregel, der Faktorregel sowie der Potenzregel für das Integrieren:

a) $\int (f(x) + g(x)) dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$ (Summenregel)

b) $\int r f(x) dx = r \int f(x) dx$ (Faktorregel)

c) $\int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1}$ ($n \neq -1$), $\int x^{-1} dx = \ln|x|$ (Potenzregel)

die Stammfunktion der Funktion $f(x) = x - \frac{50}{x^2}$ im bestimmten Integral mit:

$$f(x) = x - \frac{50}{x^2} = x - 50x^{-2} \Rightarrow F(x) = \frac{1}{2} x^2 - \frac{50}{-1} x^{-1} = \frac{1}{2} x^2 + 50x^{-1} = \frac{1}{2} x^2 + \frac{50}{x},$$

wobei Potenzgesetze ($1/x^2 = x^{-2}$, $x^{-1} = 1/x$) Verwendung finden.

II. Das bestimmte Integral errechnet sich mit Hilfe der Stammfunktion als:

$$\int_5^{10} \left(x - \frac{50}{x^2} \right) dx = \left[\frac{1}{2} x^2 + \frac{50}{x} \right]_5^{10} = \left(\frac{1}{2} \cdot 10^2 + \frac{50}{10} \right) - \left(\frac{1}{2} \cdot 5^2 + \frac{50}{5} \right) = (50 + 5) - (12,5 + 10) = 55 - 22,5 = 32,5$$

gemäß der nachstehenden Vorgehensweise:

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

(Stammfunktion bestimmen, Einsetzen der oberen und unteren Grenze des bestimmten Integrals in die Stammfunktion, Ausrechnen der Differenz zwischen Stammfunktionswert der oberen und Stammfunktionswert der unteren Grenze).