

# Mathematikaufgaben

## > Analysis

### > Bestimmtes Integral

---

**Aufgabe:** Zu berechnen ist das bestimmte Integral

$$\int_0^{\pi} \left( x^2 + \sin\left(\frac{x}{2}\right) \right) dx.$$

**Lösung:** I. Wir bestimmen unter Verwendung der Summenregel, der Potenzregel sowie der umgekehrten Kettenregel und der Regel für das Aufleiten von Sinusfunktionen für das Integrieren:

a)  $\int (f(x) + g(x)) dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$  (Summenregel)

b)  $\int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1}$  ( $n \neq -1$ ),  $\int x^{-1} dx = \ln|x|$  (Potenzregel)

c)  $\int f(ax+b) dx = \frac{1}{a} F(ax+b)$  (Kettenregel)

d)  $\int \sin x dx = -\cos x$  (Regel für die Sinusfunktion)

die Stammfunktion der Funktion  $f(x) = x^2 + \sin\left(\frac{x}{2}\right)$  im bestimmten Integral mit:

$$f(x) = x^2 + \sin\left(\frac{x}{2}\right) = x^2 + \sin\left(\frac{1}{2}x\right) \Rightarrow F(x) = \frac{1}{3}x^3 + \left(-\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right) \cdot \frac{1}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}x^3 - 2\cos\left(\frac{x}{2}\right).$$

II. Das bestimmte Integral errechnet sich mit Hilfe der Stammfunktion als:

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} \left( x^2 + \sin\left(\frac{x}{2}\right) \right) dx &= \left[ \frac{1}{3}x^3 - 2\cos\left(\frac{x}{2}\right) \right]_0^{\pi} = \left( \frac{1}{3}\pi^3 - 2\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \right) - \left( \frac{1}{3} \cdot 0^3 - 2\cos 0 \right) = \\ &= \left( \frac{\pi^3}{3} - 2 \cdot 0 \right) - (0 - 2 \cdot 1) = \frac{\pi^3}{3} + 2 \end{aligned}$$

gemäß der nachstehenden Vorgehensweise:

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

(Stammfunktion bestimmen, Einsetzen der oberen und unteren Grenze des bestimmten Integrals in die Stammfunktion, Ausrechnen der Differenz zwischen Stammfunktionswert der oberen und Stammfunktionswert der unteren Grenze).