Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Analysis
> Uneigentliches Integral

Aufgabe: Von Mathematiklehrern der Kursstufe eines Gymnasiums in einer baden-württembergischen Kleinstadt wurde folgende Aufgabe gestellt:

Zu berechnen ist das Integral

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{2x^2}\,dx.$$

sowie folgende Lösung als richtig bewertet:

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{2x^2}\,dx = \int_{-1}^{1} \frac{1}{2}x^{-2}\,dx = \left[-\frac{1}{2}x^{-1}\right]_{-1}^{1} = \left[-\frac{1}{2x}\right]_{-1}^{1} = -\frac{1}{2\cdot 1} - \left(-\frac{1}{2\cdot(-1)}\right) = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} = -1.$$

Nimm zu Aufgabe und Lösung Stellung.

Lösung: I. Auffällig ist zunächst, dass die zu integrierende Hyperbelfunktion $f(x) = \frac{1}{2x^2}$ auf dem Integrationsbereich [-1; 1] positiv ist (f(x) > 0). Wie aber kann eine positive Funktion ein negatives Integral haben? Offensichtlich hängt dies damit zusammen, dass die Hyperbel an Stelle x=0 eine Polstelle (senkrechte Asymptote) ohne Vorzeichenwechsel besitzt, somit beim besagten Integral über die Polstelle hinweg integriert wird, was zu dem Fehler führt. Bestenfalls kann aber die Polstelle der Funktion mit einem uneigentlichen Integral in Verbindung gebracht werden, wobei die Polstelle Randstelle des Integrationsbereichs sein muss. Die Bestimmung von uneigentlichen Integralen der Form $\int_{0}^{1} \frac{1}{2x^2}\,dx$ oder $\int_{-1}^{0} \frac{1}{2x^2}\,dx$ ist also möglich, führt aber auf deren Nichtexistenz (s. II.). Die Aufgabenstellung ist somit unzulässig, die als richtig bewertete Lösung schlichtweg falsch.

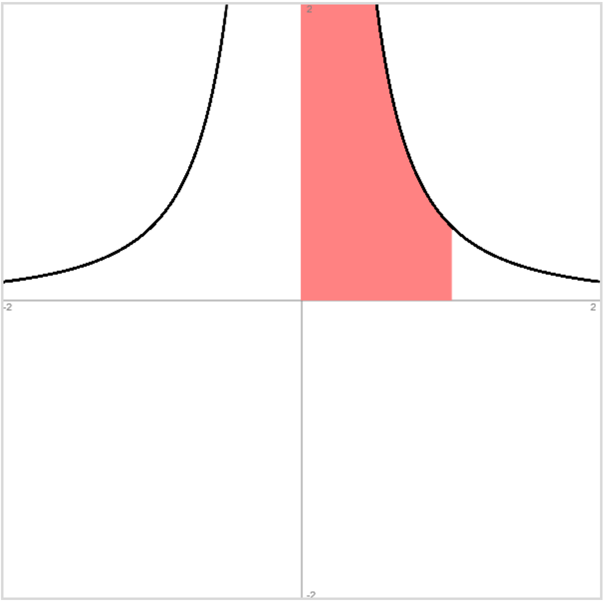
II. Das uneigentliche (Teil-) Integral $\int_{0}^{1} \frac{1}{2x^2}\,dx$ existiert nicht wegen der folgenden, um die Polstelle von $f(x) = \frac{1}{2x^2}$ kreisenden Überlegungen:

1) A(z) = $\int_{z}^{1} \frac{1}{2x^2}\,dx = \left[-\frac{1}{2x}\right]_{z}^{1} = -\frac{1}{2\cdot 1} + \frac{1}{2z} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2z}$ als Teilintegral;

2) z -> 0: A(z) -> +∞ als Grenzübergang (Limes) auf Grund von: $\frac{1}{2z}$ -> +∞ für z->0, z >0.

Wenn wir so wollen, liegt also mit dem uneigentlichen Integral eine unendlich große Fläche vor mit:

$$\int_{0}^{1} \frac{1}{2x^2}\,dx = +\infty.$$



Wegen der Achsensymmetrie von $f(x)=\frac{1}{2x^2}$ gilt auch: $\int_{-1}^{0}\frac{1}{2x^2}dx=+\infty$.

III. Allgemein sind bei <u>uneigentlichen Integralen über Potenzfunktionen</u> mit negativem Exponenten folgende Aussagen richtig:

Gegeben: $f(x)=\frac{a}{x^r}$ mit a>0, r>0

Uneigentliche Integrale:

	Unbeschränkter Integrationsbereich (Integral 1. Art)	Polstelle x=0 (Integral 2. Art)
0<r<1	$\int_{1}^{\infty}\frac{a}{x^r}dx$ existiert nicht	$\int_{0}^{1}\frac{a}{x^r}dx=\frac{a}{1-r}$
r=1	$\int_{1}^{\infty}\frac{a}{x^r}dx$ existiert nicht	$\int_{0}^{1}\frac{a}{x^r}dx$ existiert nicht
r>1	$\int_{1}^{\infty}\frac{a}{x^r}dx=\frac{a}{r-1}$	$\int_{0}^{1}\frac{a}{x^r}dx$ existiert nicht