Michael Buhlmann

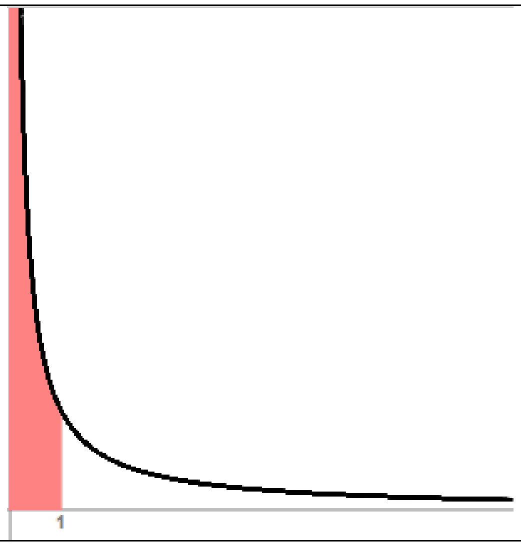
Mathematikaufgaben
> Analysis
> Uneigentliches Integral

Aufgabe: Die Fläche zwischen der Funktion $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$ und der x-Achse auf dem Intervall [0; 1] ist zu berechnen.

Lösung: I. Bei dieser Aufgabe muss ein uneigentliches Integral 2. Art bestimmt werden; die Funktion besitzt am Rand des Intervalls eine Polstelle, die Integrationsgrenzen sind endlich. Allgemein sind bei <u>uneigentlichen Integralen über Potenzfunktionen</u> mit negativem Exponenten folgende Aussagen richtig:

Gegeben: $f(x)=\frac{a}{x^r}$ mit a>0, r>0

Uneigentliche Integrale:

	Unbeschränkter Integrationsbereich (Integral 1. Art)	Polstelle x=0 (Integral 2. Art)
0<r<1	$\int_1^\infty \frac{a}{x^r}dx$ existiert nicht	$\int_0^1 \frac{a}{x^r}dx=\frac{a}{1-r}$
r=1	$\int_1^\infty \frac{a}{x^r}dx$ existiert nicht	$\int_0^1 \frac{a}{x^r}dx$ existiert nicht
r>1	$\int_1^\infty \frac{a}{x^r}dx=\frac{a}{r-1}$	$\int_0^1 \frac{a}{x^r}dx$ existiert nicht
		

II. Die Funktion $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$ besitzt mit dem Definitionsbereich D_f = (0; +∞) am Rand des Definitionsbereichs bei x = 0 eine <u>Polstelle</u> (senkrechte Asymptote) wegen:

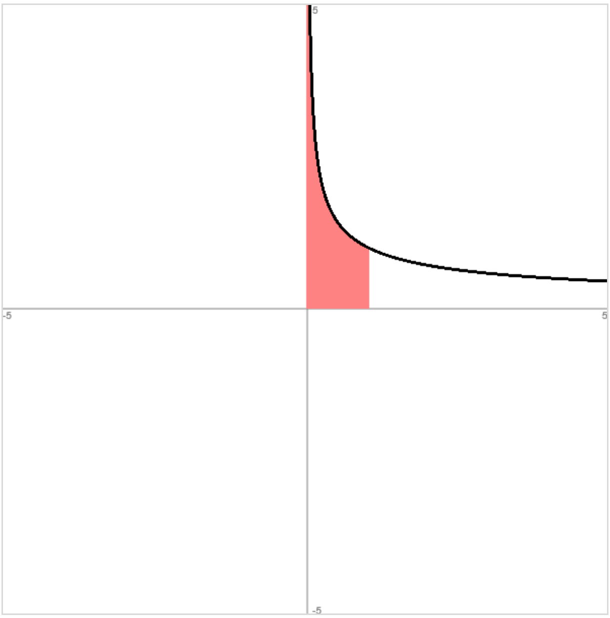
Nenner = 0 ⇔ $\sqrt{x}=0$ ⇔ x = 0.

III. Das <u>uneigentliche Integral</u> $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx$ existiert wegen der folgenden, um die genannte Polstelle x = 0 von $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$ kreisenden Überlegungen:

1) A(z) = $\int_z^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx=\int_z^1 x^{-\frac{1}{2}}dx=\left[\frac{1}{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}\right]_z^1=\left[2\sqrt{x}\right]_z^1=2\sqrt{1}-2\sqrt{z}=2-2\sqrt{z}$ als Teilintegral;

2) z -> 0: A(z) -> $2-2\sqrt{0}$ = 2 als Grenzübergang (Limes) für z->0, z>0.

Es ergibt sich also eine endlich große Fläche zwischen Funktion, x- und y-Achse mit: $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx=2$.



www.michael-buhlmann.de / 01.2020 / Aufgabe 936