Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Analysis
> Uneigentliches Integral

Aufgabe: Die Fläche zwischen der Funktion $f(x) = e^{-2x+3}$ und der x-Achse auf dem Intervall [0; ∞) ist zu bestimmen.

Lösung: I. Uneigentliche Integrale hängen mit „uneigentlichen", weil unendlichen (unendlich langen, unendlich hohen) Flächen zusammen und ergeben sich, wenn auf einem endlichen Intervall [a; b] eine Funktion f(x) unbeschränkt ist (also eine Polstelle besitzt) oder wenn das Intervall als Integrationsbereich einer (beschränkten) Funktion f(x) unendliche Länge hat, also von der Form [a; ∞) oder (-∞; a] oder (-∞; ∞) ist. In jedem Fall führt man gegen die Unendlichkeitsstelle (hier: x_0 = a) oder gegen ±∞ (hier: +∞) einen Grenzprozess durch, d.h. für hier angenommene auf dem Intervall nicht negative Funktionen f(x) ergibt sich – die Existenz endlicher Grenzwerte vorausgesetzt – die (somit endliche) Fläche A als Grenzwert „eigentlicher" („Näherungs-") Flächen A(u) und somit als:

$$A(u) = \int_u^b f(x)dx = [F(x)]_u^b = F(b) - F(u) \underset{u->a}{->} A = \int_a^b f(x)dx$$

im Fall der Polstelle x_0 = a mit reellem u mit b > u > a bzw.

$$A(u) = \int_a^u f(x)dx = [F(x)]_a^u = F(u) - F(a) \underset{u->\infty}{->} A = \int_a^\infty f(x)dx$$

im Fall des unendlich großen Integrationsbereichs mit reellem u mit u > a.

II. Die Funktion $f(x) = e^{-2x+3}$ ist als Exponentialfunktion auf ganz **R** definiert, es gilt – und dies ist eine notwendige Voraussetzung für die Existenz des uneigentlichen Integrals –, dass die Funktion die x-Achse als waagerechte Asymptote y = 0 bei x->+∞ besitzt, auch positiv ist.

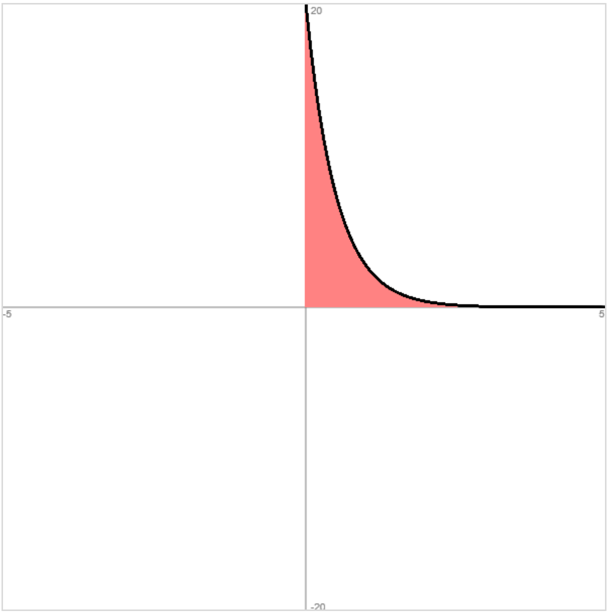
III. Das uneigentliche Integral (1. Art) $\int_0^\infty e^{-2x+3}dx$ existiert wegen der folgenden Überlegungen: Für die Funktion f(x) ist der Grenzprozess nach Einführung von u mit u>0 durchzuführen:

$$A(u) = \int_0^u e^{-2x+3}dx = \left[-\frac{1}{2}e^{-2x+3}\right]_0^u =$$

$$-\frac{1}{2}e^{-2u+3} - (-\frac{1}{2}e^{-2\cdot 0+3}) = \frac{1}{2}e^3 - \frac{1}{2}e^{-2u+3} \underset{u->\infty}{->}$$

$$\frac{1}{2}e^3 - \frac{1}{2}\cdot 0 = \frac{1}{2}e^3 = A = \int_0^\infty e^{-2x+3}dx\ ,$$

so dass sich die unendlich lange, endlich große Fläche A mit Flächeninhalt $e^3/2$ ergibt.



www.michael-buhlmann.de / 01.2020 / Aufgabe 937