Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Analysis
> Uneigentliches Integral

Aufgabe: Die Fläche zwischen der Funktion $f(x)=e^{-0,5x}+x+1$ und ihrer Asymptote ist auf dem Intervall [0; ∞) ist zu bestimmen.

Lösung: I. Uneigentliche Integrale hängen mit „uneigentlichen“, weil unendlichen (unendlich langen, unendlich hohen) Flächen zusammen und ergeben sich, wenn auf einem endlichen Intervall [a; b] eine Funktion f(x) unbeschränkt ist (also eine Polstelle besitzt) oder wenn das Intervall als Integrationsbereich einer (beschränkten) Funktion f(x) unendliche Länge hat, also von der Form [a; ∞) oder (-∞; a] oder (-∞; ∞) ist. In jedem Fall führt man gegen die Unendlichkeitsstelle (hier: x_0 = a) oder gegen ±∞ (hier: +∞) einen Grenzprozess durch, d.h. für hier angenommene auf dem Intervall nicht negative Funktionen f(x) ergibt sich – die Existenz endlicher Grenzwerte vorausgesetzt – die (somit endliche) Fläche A als Grenzwert „eigentlicher“ („Näherungs-“) Flächen A(u) und somit als:

$$A(u)=\int_u^b f(x)dx=\left[F(x)\right]_u^b=F(b)-F(u)\underset{u->a}{->}A=\int_a^b f(x)dx$$

im Fall der Polstelle x_0 = a mit reellem u mit b > u > a bzw.

$$A(u)=\int_a^u f(x)dx=\left[F(x)\right]_a^u=F(u)-F(a)\underset{u->\infty}{->}A=\int_a^\infty f(x)dx$$

im Fall des unendlich großen Integrationsbereichs mit reellem u mit u > a.
Wichtig ist noch, wenn eine Funktion f(x) für x -> ∞ oder x -> -∞ gegen eine Asymptote y läuft; die unendlich lange Fläche ergibt sich hier als (endliche) Fläche zwischen Funktion und Asymptote.

II. Die Funktion $f(x)=e^{-0,5x}+x+1$ ist als Exponentialfunktion auf ganz **R** definiert, es gilt – und dies ist eine notwendige Voraussetzung für die Existenz des uneigentlichen Integrals –, dass die Funktion die Gerade y = x + 1 als schiefe Asymptote bei x->+∞ besitzt:

x -> +∞: f(x) -> x + 1 = y.

Wegen $e^{-0,5x}$ > 0 liegt f(x) – betrachtet als Kurve im x-y-Koordinatensystem – stets oberhalb der Asymptote y.

III. Die unendlich lange Fläche zwischen Funktion $f(x)=e^{-0,5x}+x+1$ und Asymptote y = x +1 ist das uneigentliche Integral (1. Art):

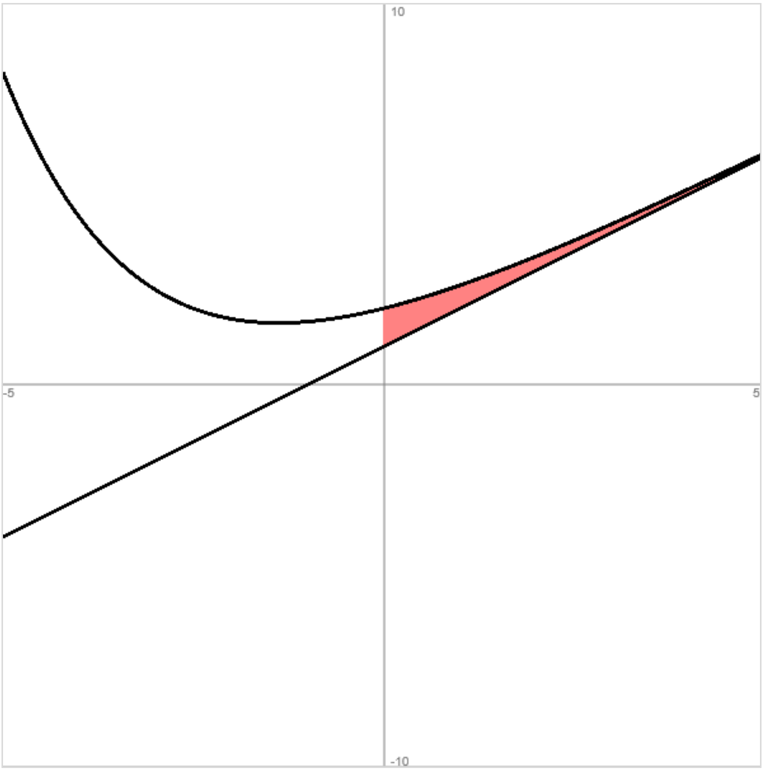
$$\int_0^\infty (f(x)-y)dx=\int_0^\infty ((e^{-0,5x}+x+1)-(x+1))dx=\int_0^\infty e^{-0,5x}dx,$$

falls existent. Als gesuchte Fläche A ergibt sich mit u>0 und den Teilflächen A(u):

$$A(u)=\int_0^u[f(x)-y]dx=\int_0^u[(e^{-0,5x}+x+1)-(x+1)]dx=\int_0^u e^{-0,5x}dx=$$

$$\left[-2e^{-0,5x}\right]_0^u=-2e^{-0,5u}-(-2e^{-0,5\cdot 0})=2-2e^{-0,5u}\underset{u->\infty}{->}2-2\cdot 0=2=A=\int_0^\infty[f(x)-y]dx\ ,$$

so dass sich die unendlich lange, zwischen Funktion und Asymptote gelegene, endlich große Fläche A mit Flächeninhalt 2 ergibt.



www.michael-buhlmann.de / 01.2020 / Aufgabe 938