

Mathematikaufgaben

> Analysis

> Ableitung eines bestimmten Integrals

Aufgabe: Zu berechnen ist die Ableitung der Funktion des bestimmten Integrals

$$I(x) = \int_{-2x}^{3x} t^2 dt.$$

1. Lösung: I. Wir bestimmen zunächst unter Verwendung der Faktor- und Potenzregel für das Aufleiten:

a) $\int rf(x)dx = r \int f(x)dx$ (Faktorregel)

b) $\int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1}$ ($n \neq -1$) (Potenzregel)

zum Integranden $f(t) = t^2$ die Stammfunktion $F(t)$ als:

$$F(t) = \frac{1}{3} t^3.$$

II. Wir berechnen unter Verwendung der Stammfunktion das bestimmte Integral:

$$I(x) = \int_{-2x}^{3x} t^2 dt = \left[\frac{1}{3} t^3 \right]_{-2x}^{3x} = \frac{1}{3} (3x)^3 - \frac{1}{3} (-2x)^3 = \frac{1}{3} \cdot 27x^3 + \frac{1}{3} \cdot 8x^3 = \frac{35}{3} x^3$$

gemäß der nachstehenden Vorgehensweise:

$$\int_{a(x)}^{b(x)} f(t) dt = [F(t)]_{a(x)}^{b(x)} = F(b(x)) - F(a(x))$$

(Stammfunktion bestimmen, Einsetzen der oberen und unteren Grenze des bestimmten Integrals in die Stammfunktion, Ausrechnen der Differenz zwischen Stammfunktionswert der oberen und Stammfunktionswert der unteren Grenze).

III. Das Ableiten der Funktion $I(x)$ erfolgt gemäß den Ableitungsregeln:

a) $(rf(x))' = r f'(x)$ (Faktorregel)

b) $(x^n)' = n x^{n-1}$ (Potenzregel)

zu:

$$I'(x) = \frac{35}{3} \cdot 3x^2 = 35x^2.$$

2. Lösung: I. Unter Beachtung des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung heben sich das Auf- und Ableiten einer Funktion gegenseitig auf. Bilden wir also zu einer integrierbaren Funktion $f(t)$ zunächst das bestimmte Integral mit von x abhängigen Grenzen $a(x)$ und $b(x)$, so erhalten wir:

$$I(x) = \int_{a(x)}^{b(x)} f(t) dt = [F(t)]_{a(x)}^{b(x)} = F(b(x)) - F(a(x)).$$

Ableiten ergibt nach der Kettenregel:

$$I'(x) = F'(b(x))b'(x) - F'(a(x))a'(x) = f(b(x))b'(x) - f(a(x))a'(x),$$

so dass insgesamt

$$\frac{d\left(\int_{a(x)}^{b(x)} f(t)dt\right)}{dx} = f(b(x))b'(x) - f(a(x))a'(x)$$

folgt.

II. Es gilt damit:

$$I'(x) = \frac{d\left(\int_{-2x}^{3x} t^2 dt\right)}{dx} = (3x)^2 \cdot 3 - (-2x)^2(-2) = 9x^2 \cdot 3 + 4x^2 \cdot 2 = 27x^3 + 8x^2 = 35x^2.$$

www.michael-buhlmann.de / 01.2021 / Aufgabe 1267