

Mathematikaufgaben

> Analysis

> Bestimmtes Integral

Aufgabe: Berechne das bestimmte Integral

$$\int_0^{\pi} x \cos x dx .$$

Lösung: I. Wir ermitteln zunächst eine Stammfunktion $F(x)$ zu $f(x) = x \cos x$ mit Hilfe der Produktintegration (partielle Integration) gemäß der Regel:

$$\int u'(x) \cdot v(x) dx = u(x) \cdot v(x) - \int u(x) \cdot v'(x) dx, \quad \int u(x) \cdot v'(x) dx = u(x) \cdot v(x) - \int u'(x) \cdot v(x) dx .$$

Es ist:

$$F(x) = \int x \cos x dx \stackrel{\left\{ \begin{array}{l} u(x)=x, u'(x)=1 \\ v'(x)=\cos x, v(x)=\sin x \end{array} \right.}{=} x \sin x - \int 1 \cdot \sin x dx = x \sin x - (-\cos x) = x \sin x + \cos x .$$

II. Das bestimmte Integral berechnet sich mit Hilfe der gefundenen Stammfunktion als:

$$\int_0^{\pi} x \cos x dx = [x \sin x + \cos x]_0^{\pi} = (\pi \sin \pi + \cos \pi) - (0 + \cos 0) = \cos \pi - \cos 0 = -1 - 1 = -2 .$$

