Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Analysis
> Bestimmtes Integral

Aufgabe: Berechne das bestimmte Integral

$$\int_0^{2\pi} \sin(2x)\cos x dx .$$

1. Lösung: I. Es gilt beim Integrieren eines unbestimmten Integrals die <u>Substitutionsregel</u>:

$$\int f(x)dx = \int f(g(u)) \cdot g'(u)du$$

mit: x = g(u), du = g'(u)du bzw.:

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(u)du$$

mit: u = g(x), du = g'(x)dx. Ein Spezialfall der Substitution ist:

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln|f(x)|.$$

II. Es gilt die <u>trigonometrische Beziehung</u>:

$$\sin(2x) = 2\sin x \cos x .$$

III. Wir bestimmen die Stammfunktion bzw. das <u>unbestimmte Integral</u> zu f(x) = $\sin(2x)\cos x$ mit Hilfe der Beziehung (*) als:

$$\int \sin(2x)\cos x dx = \int 2\sin x \cos x \cdot \cos x dx = 2\int \cos^2 x \sin x dx \underset{\left\{\frac{du}{dx} = -\sin x \Leftrightarrow -du = \sin x dx\right\}}{\overset{u=\cos x}{=}}$$

$$2\int u^2(-du) = -2\int u^2 du = -2\cdot\frac{1}{3}u^3 = -\frac{2}{3}u^3 = -\frac{2}{3}(\cos x)^3 = -\frac{2}{3}\cos^3 x.$$

IV. Das bestimmte Integral errechnet sich folglich als:

$$\int_0^{2\pi} \sin(2x)\cos x dx = \left[-\frac{2}{3}\cos^3 x\right]_0^{2\pi} = -\frac{2}{3}\cos^3(2\pi) - \left(-\frac{2}{3}\cos^3 0\right) = -\frac{2}{3} + \frac{2}{3} = 0.$$

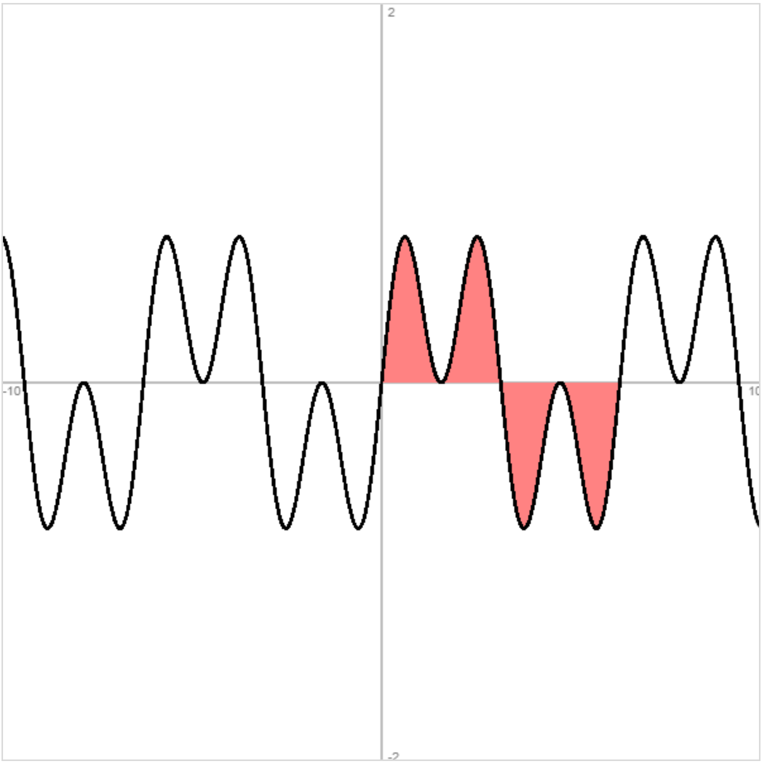
2. Lösung: I. Die Funktion f(x) = $\sin(2x)\cos x$ ist <u>symmetrisch</u> zum Punkt Z(π|0) wegen:

f(π+x) = sin(2(π+x))·cos(π+x) = sin(2π+2x)·cos(π+x) = sin(2x)·cos(π+x) = -sin(-2x)·cos(π–x) = -sin(2π–2x)·cos(π–x) = -sin(2(π–x))·cos(π–x) = -f(π–x))

auf Grund der 2π-Periodizität und der Symmetrie zum Ursprung bei der Sinus- und der Symmetrie zur Achse x=π bei der Kosinusfunktion.

II. Punktsymmetrie der Funktion f(x) = $\sin(2x)\cos x$ zum Punkt Z(π|0) und die Symmetrie des Integrationsbereichs [0; 2π] zu x=π führt dazu, dass die Integration einer auf dem Integrationsintervall punktsymmetrischen Funktion zu einem bestimmten Integral mit Wert 0 führt. Also gilt:

$$\int_0^{2\pi} \sin(2x)\cos x dx = 0.$$



www.michael-buhlmann.de / 02.2021 / Aufgabe 1303