Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Analysis
> Bestimmtes Integral

Aufgabe: Berechne das bestimmte Integral

$$\int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2}\,dx \text{, r > 0 reell.}$$

Lösung: I. Es gilt beim Integrieren eines unbestimmten Integrals die Substitutionsregel:

$$\int f(x)dx = \int f(g(u)) \cdot g'(u)du$$

mit: x = g(u), du = g'(u)du bzw.:

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(u)du$$

mit: u = g(x), du = g'(x)dx. Ein Spezialfall der Substitution ist:

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln|f(x)|.$$

II. Es gilt die Regel der Produktintegration (partielle Integration) gemäß:

$$\int u'(x) \cdot v(x)dx = u(x) \cdot v(x) - \int u(x) \cdot v'(x)dx, \quad \int u(x) \cdot v'(x)dx = u(x) \cdot v(x) - \int u'(x) \cdot v(x)dx.$$

III. Mit Hilfe einer geeigneten trigonometrischen Substitution bestimmen wir das unbestimmte Integral mit positivem reellen r:

$$\int \sqrt{r^2 - x^2}dx = r\int \sqrt{1 - \left(\frac{x}{r}\right)^2}dx \underset{\left\{\begin{array}{l} \frac{x}{r}=\sin t \Leftrightarrow x = r\sin t \\ \frac{dx}{dt}=r\cos t \Leftrightarrow dx = r\cos t dt \end{array}\right\}}{=} r\int \sqrt{1-(\sin t)^2} \cdot r\cos t dt =$$

$$r^2\int \sqrt{1-\sin^2 t} \cdot \cos t dt \underset{\left\{\begin{array}{l} \sin^2 t + \cos^2 t = 1 \Leftrightarrow \\ \cos^2 t = 1 - \sin^2 t \Leftrightarrow \\ \cos t = \sqrt{1-\sin^2 t} \end{array}\right\}}{=} r^2\int \cos t \cdot \cos t dt = r^2 \int \cos^2 t dt.$$

Das unbestimmte Integral $\int \cos^2 t dt$ ist gemäß der Produktintegration zu ermitteln; es gilt zunächst:

$$\int \cos^2 t dt = \int \cos t \cdot \cos t dt \underset{\left\{\begin{array}{l} u'(t)=\cos t, u(t)=\sin t \\ v(t)=\cos t, v'(t)=-\sin t \end{array}\right\}}{=} \sin t \cdot \cos t - \int \sin t \cdot (-\sin t)dt =$$

$$\sin t \cdot \cos t + \int \sin t \cdot \sin t dt = \sin t \cdot \cos t + \int \sin^2 t dt \underset{\left\{\begin{array}{l} \sin^2 t + \cos^2 t = 1 \Leftrightarrow \\ \sin^2 t = 1 - \cos^2 t \end{array}\right\}}{=} \sin t \cdot \cos t + \int (1-\cos^2 t)dt =$$

$$\sin t \cdot \cos t + \int 1dt - \int \cos^2 t dt = \sin t \cdot \cos t + t - \int \cos^2 t dt,$$

d.h.:

$$\int \cos^2 t dt = \sin t \cdot \cos t + t - \int \cos^2 t dt.$$

Die Gleichung lässt sich nach $\int \cos^2 t dt$ umstellen vermöge:

$$\int \cos^2 t\,dt = \sin t \cdot \cos t + t - \int \cos^2 t\,dt \qquad | + \int \cos^2 t\,dt$$

$$2\int \cos^2 t\,dt = \sin t \cdot \cos t + t \qquad | :2$$

$$\int \cos^2 t\,dt = \frac{\sin t \cdot \cos t + t}{2}.$$

Aus $\int \sqrt{r^2 - x^2}\,dx \underset{\left\{\begin{array}{l}\frac{x}{r}=\sin t \Leftrightarrow x = r\sin t\\ \frac{dx}{dt}=r\cos t \Leftrightarrow dx = r\cos t\,dt\end{array}\right\}}{=} r^2 \int \cos^2 t\,dt$ und $\int \cos^2 t\,dt = \frac{\sin t \cdot \cos t + t}{2}$ folgt:

$$\int \sqrt{r^2 - x^2}\,dx \underset{\left\{\begin{array}{l}\frac{x}{r}=\sin t \Leftrightarrow x = r\sin t\\ \frac{dx}{dt}=r\cos t \Leftrightarrow dx = r\cos t\,dt\end{array}\right\}}{=} r^2 \int \cos^2 t\,dt = r^2\,\frac{\sin t \cdot \cos t + t}{2} \underset{\left\{\begin{array}{c}\sin t = \frac{x}{r}\\ \cos t = \sqrt{1-\left(\frac{x}{r}\right)^2}\\ t = \arcsin(\frac{x}{r})\end{array}\right\}}{=}$$

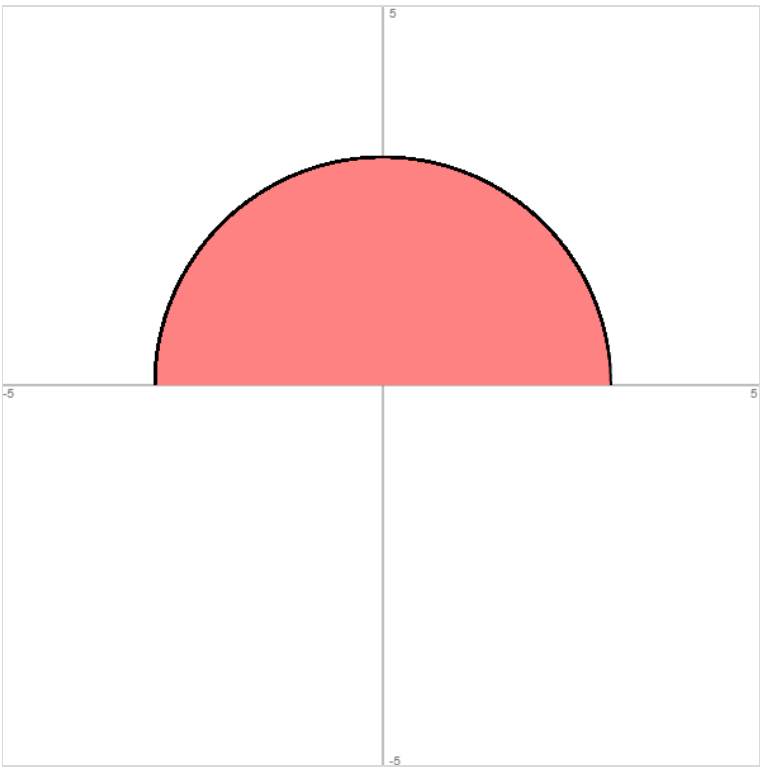
$$r^2\,\frac{\frac{x}{r}\sqrt{1-\left(\frac{x}{r}\right)^2} + \arcsin(\frac{x}{r})}{2} = r^2\,\frac{\frac{x}{r}\cdot\frac{1}{r}\sqrt{r^2 - x^2} + \arcsin(\frac{x}{r})}{2} = \frac{1}{2}x\sqrt{r^2 - x^2} + \frac{r^2}{2}\arcsin(\frac{x}{r}).$$

IV. Das <u>bestimmte Integral</u> errechnet sich damit als Fläche eines Halbkreises mit Radius r:

$$\int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2}\,dx = \left[\frac{1}{2}x\sqrt{r^2 - x^2} + \frac{r^2}{2}\arcsin(\frac{x}{r})\right]_{-r}^{r} =$$

$$\left(\frac{1}{2}r\sqrt{r^2 - r^2} + \frac{r^2}{2}\arcsin(\frac{r}{r})\right) - \left(\frac{1}{2}(-r)\sqrt{r^2 - (-r)^2} + \frac{r^2}{2}\arcsin(\frac{-r}{r})\right) =$$

$$\left(0 + \frac{r^2}{2}\arcsin 1\right) - \left(0 + \frac{r^2}{2}\arcsin(-1)\right) = \frac{r^2}{2}\cdot\frac{\pi}{2} - \frac{r^2}{2}\cdot\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{r^2}{2}\cdot\frac{\pi}{2} + \frac{r^2}{2}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{1}{2}\pi r^2.$$



www.michael-buhlmann.de / 02.2021 / Aufgabe 1305