**Michael Buhlmann**

# Mathematikaufgaben
## > Analysis
## > Ableitung, bestimmtes Integral/Integralfunktion

---

**Aufgabe**: Bestimme für die (uneigentliche) Integralfunktion (Integralsinus Si(x))

$$I(x) = \int_0^{x^2} \frac{\sin t}{t} dt \text{ , x>0,}$$

die Ableitung.

**Lösung**: I. Voraussetzen können wir die Reihenentwicklung der Sinusfunktion (Potenzreihe, Taylorreihe mit Entwicklungsmittelpunkt $t_0 = 0$); diese lautet für alle reellen t:

$$\sin t = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{(2i+1)!} t^{2i+1} \quad (*).$$

II. Es ergibt sich hinsichtlich der Integralfunktion:

$$I(x) = \int_0^{x^2} \frac{\sin t}{t} dt = \int_0^{x^2} \frac{\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{(2i+1)!} t^{2i+1}}{t} dt = \int_0^{x^2} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{(2i+1)!} t^{2i} dt = \left[ \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{(2i+1)!} \cdot \frac{1}{2i+1} t^{2i+1} \right]_0^{x^2} =$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{(2i+1)!} \cdot \frac{1}{2i+1} (x^2)^{2i+1} - 0 = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{(2i+1)!} \cdot \frac{1}{2i+1} x^{4i+2}$$

auf Grund der gliedweisen Integration absolut konvergenter Potenzreihen.

III. Ebenso ermöglicht das gliedweise Ableiten der Potenzreihe I(x) die Bestimmung der Ableitung der Integralfunktion:

$$I(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{(2i+1)!} \cdot \frac{1}{2i+1} x^{4i+2} \quad =>$$

$$I'(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{(2i+1)!} \cdot \frac{1}{2i+1} \cdot (4i+2) \cdot x^{4i+1} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{(2i+1)!} \cdot 2 \cdot x^{4i+1} = \frac{2}{x} \cdot \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{(2i+1)!} \cdot x^{4i+2} =$$

$$\frac{2}{x} \cdot \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{(2i+1)!} \cdot (x^2)^{2i+1} = \frac{2}{x} \cdot \sin(x^2) = \frac{2\sin(x^2)}{x}$$

für x>0.

IV. Für x = $\sqrt{\pi}$ ergibt sich im Übrigen die Wilbraham–Gibbs-Konstante:

$$I(\sqrt{\pi}) = \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t} dt = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{(2i+1)!} \cdot \frac{1}{2i+1} \pi^{4i+2} \quad = 1{,}851937052\ldots \text{ (= Si(π)).}$$

www.michael-buhlmann.de / 02.2021 / Aufgabe 1321