**Michael Buhlmann**

# Mathematikaufgaben
## > Analysis
## > Uneigentliches Integral

---

**Aufgabe**: Die Fläche zwischen der Funktion $f(x)=\frac{5}{(x+4)^2}$ und der x-Achse ist auf dem Intervall [0; ∞) ist zu bestimmen.

**Lösung**: I. <u>Uneigentliche Integrale</u> hängen mit „uneigentlichen“, weil unendlichen (unendlich langen, unendlich hohen) Flächen zusammen und ergeben sich, wenn auf einem endlichen Intervall [a; b] eine Funktion f(x) unbeschränkt ist (also eine Polstelle besitzt) oder wenn das Intervall als Integrationsbereich einer (beschränkten) Funktion f(x) unendliche Länge hat, also von der Form [a; ∞) oder (-∞; a] oder (-∞; ∞) ist. In jedem Fall führt man gegen die Unendlichkeitsstelle (hier: $x_0$ = a) oder gegen ±∞ (hier: +∞) einen Grenzprozess durch, d.h. für hier angenommene auf dem Intervall nicht negative Funktionen f(x) ergibt sich – die Existenz endlicher Grenzwerte vorausgesetzt – die (somit endliche) Fläche A als Grenzwert „eigentlicher“ („Näherungs-“) Flächen A(u) und somit als:

$$A(u)=\int_u^b f(x)dx=\left[F(x)\right]_u^b=F(b)-F(u)\ \underset{u->a}{->}\ A=\int_a^b f(x)dx$$

im Fall der Polstelle $x_0$ = a mit reellem u mit b > u > a bzw.

$$A(u)=\int_a^u f(x)dx=\left[F(x)\right]_a^u=F(u)-F(a)\ \underset{u->\infty}{->}\ A=\int_a^\infty f(x)dx$$

im Fall des unendlich großen Integrationsbereichs mit reellem u mit u > a.
Wichtig ist noch, wenn eine Funktion f(x) für x -> ∞ oder x -> -∞ gegen eine Asymptote y läuft; die unendlich lange Fläche ergibt sich hier als (endliche) Fläche zwischen Funktion und Asymptote.

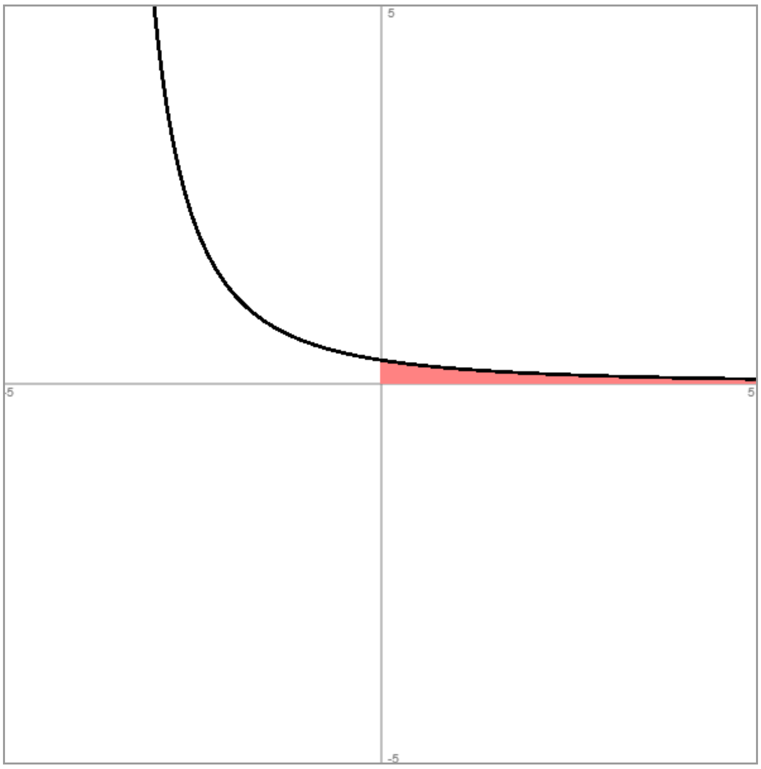
II. Die (verschobene, gestreckte Hyperbel-) Funktion $f(x)=\frac{5}{(x+4)^2}$ ist wegen der senkrechten Asymptote (Polstelle) bei x = -4 auf dem Intervall [0; ∞) definiert und dort integrierbar. Das <u>uneigentliche Integral</u> (1. Art) $\int_0^\infty \frac{5}{(x+4)^2}dx$ existiert wegen der folgenden Überlegungen:

Für die Funktion f(x) ist der Grenzprozess nach Einführung von u mit u>0 durchzuführen:

$$A(u)=\int_0^u \frac{5}{(x+4)^2}dx=\int_0^u 5(x+4)^{-2}dx=\left[5\cdot\frac{1}{-1}(x+4)^{-1}\right]_0^u=\left[-\frac{5}{x+4}\right]_0^u=-\frac{5}{u+4}-\left(-\frac{5}{0+4}\right)=$$

$$-\frac{5}{u+4}+\frac{5}{4}=\frac{5}{4}-\frac{5}{u+4}\ \underset{u->\infty}{->}\ \frac{5}{4}-0=\frac{5}{4}=A=\int_0^\infty \frac{5}{(x+4)^2}dx,$$

so dass sich die unendlich lange, endlich große Fläche A mit Flächeninhalt 5/4 = 1,25 ergibt.




III. Zur Verdeutlichung des Grenzprozesses betrachten wir beispielhaft für verschiedene u die Teilintegrale bzw. Teilflächen A(u) = $\int_0^u \frac{5}{(x+4)^2}\,dx = \left[-\frac{5}{x+4}\right]_0^u$ mit der vorgegebenen Funktion $f(x) = \frac{5}{(x+4)^2}$ und ihrer Stammfunktion $F(x) = -\frac{5}{x+4}$:

| **Teilflächen:** | |
|---|---|
| u = | A(u) = $_0\int^u$ f(x) *dx* = |
| 1 | A(1) = $_0\int^1$ f(x) *dx* = $[F(x)]_0^1$ = F(1)-F(0) = -1+1.25 = 0.25 |
| 2 | A(2) = $_0\int^2$ f(x) *dx* = $[F(x)]_0^2$ = F(2)-F(0) = -0.833333+1.25 = 0.416667 |
| 5 | A(5) = $_0\int^5$ f(x) *dx* = $[F(x)]_0^5$ = F(5)-F(0) = -0.555556+1.25 = 0.694444 |
| 10 | A(10) = $_0\int^{10}$ f(x) *dx* = $[F(x)]_0^{10}$ = F(10)-F(0) = -0.357143+1.25 = 0.892857 |
| 50 | A(50) = $_0\int^{50}$ f(x) *dx* = $[F(x)]_0^{50}$ = F(50)-F(0) = -0.092593+1.25 = 1.157407 |
| 100 | A(100) = $_0\int^{100}$ f(x) *dx* = $[F(x)]_0^{100}$ = F(100)-F(0) = -0.048077+1.25 = 1.201923 |
| 500 | A(500) = $_0\int^{500}$ f(x) *dx* = $[F(x)]_0^{500}$ = F(500)-F(0) = -0.009921+1.25 = 1.240079 |
| 1000 | A(1000) = $_0\int^{1000}$ f(x) *dx* = $[F(x)]_0^{1000}$ = F(1000)-F(0) = -0.00498+1.25 = 1.24502 |
| 5000 | A(5000) = $_0\int^{5000}$ f(x) *dx* = $[F(x)]_0^{5000}$ = F(5000)-F(0) = -0.000999+1.25 = 1.249001 |
| 10000 | A(10000) = $_0\int^{10000}$ f(x) *dx* = $[F(x)]_0^{10000}$ = F(10000)-F(0) = -0.0005+1.25 = 1.2495 |
| … | … |

www.michael-buhlmann.de / 02.2022 / Aufgabe 1584