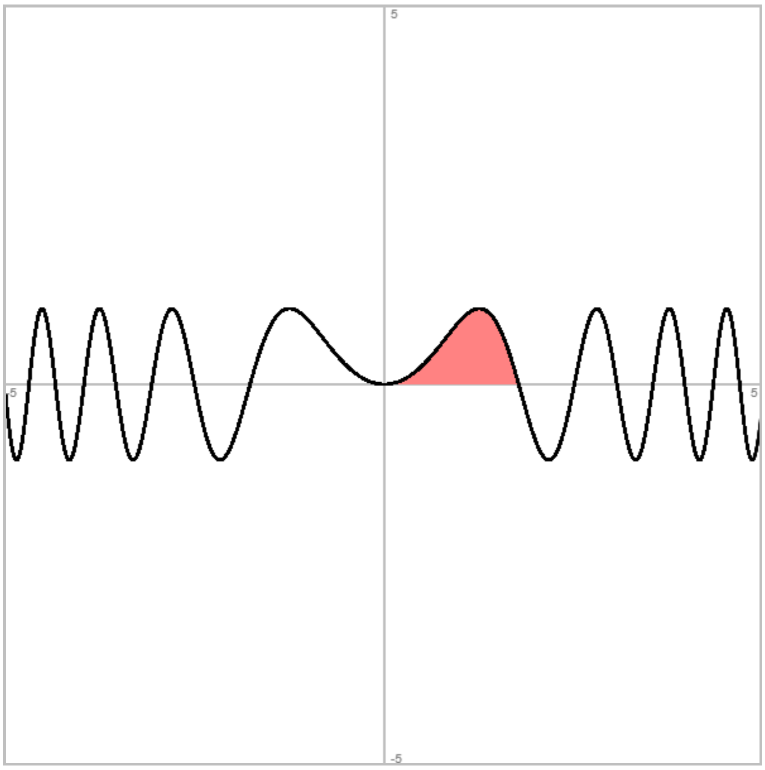
Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Analysis
> Integral (numerische Integration)

Aufgabe: Berechne das bestimme Integral:

$$\int_0^{\sqrt{\pi}} \sin(x^2)dx.$$



Lösung: I. Der Integrand f(x) = $\sin(x^2)$ besitzt keine Stammfunktion, so dass das oben stehende bestimmte Integral nur mittels numerischer Integration errechnet werden kann. Numerische Integration (Quadratur) bedeutet die Berechnung von bestimmten Integralen mittels Näherungsformeln. Dies kann mit der sog. Simpsonregel (Keplersche Fassregel) geschehen vermöge:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{1}{6}(b-a)\left[f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right]$$

mit dem Intervall [a; b] (a, b reell, a≤b) als Integrationsbereich und einer auf [a; b] definierten integrierbaren Funktion f(x) (nicht notwendigerweise mit: f(x) ≥ 0 auf [a; b]).

II. Es ist damit auf dem Intervall [0; $\sqrt{\pi}$] mit a = 0, $\frac{a+b}{2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, b = $\sqrt{\pi}$:

$$\int_0^{\sqrt{\pi}} \sin(x^2)dx =$$

$$\frac{1}{6}(\sqrt{\pi}-0)\left[f(0)+4f\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)+f(\sqrt{\pi})\right]=\frac{\sqrt{\pi}}{6}\left[\sin(0)+4\sin(\frac{\pi}{4})+\sin(\pi)\right]=\frac{\sqrt{\pi}}{6}\cdot 4\cdot\frac{1}{2}\sqrt{2}=\frac{\sqrt{2\pi}}{3}\approx$$

0,8355.

Der Näherungswert für das bestimmte Integral $\int_0^{\sqrt{\pi}} \sin(x^2)dx$ beträgt also: A_1 = 0,8355.

III. Wenden wir die Simpsonregel auf eine gerade Anzahl 2n (n = 1, 2, …) von Teilintervallen des Integrationsbereichs [a; b] an, so ergibt sich die verkettete Simpsonregel bei $h=\frac{b-a}{2n}$:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{1}{3}h\cdot[f(a)+4[f(a+h)+f(a+3h)+...+f(b-h)]+2[f(a+2h)+f(a+4h)+...+f(b-2h)]+f(b)]$$

zur Ermittlung (somit) besserer Näherungswerte für das zu berechnende bestimmte Integral.

IV. Im Fall des Integrals $\int_0^{\sqrt{\pi}} \sin(x^2)dx$ ergeben sich vermöge der verketteten Simpsonregel die in der nachstehenden Tabelle aufgeführten Näherungen:

n =	$\int_0^{\sqrt{\pi}} \sin(x^2)dx \approx$
1	A_1 = 0.8355
2	A_2 = 0.9036
4	A_4 = 0.8954
8	A_8 = 0.8949
16	A_{16} = 0.8948
32	A_{32} = 0.8948
64	A_{64} = 0.8948

Erkennbar wird, dass bei einer genügenden Anzahl von Intervallen, in die der Integrationsbereich aufgeteilt ist, die verkettete Simpsonregel als gute Näherung des Integrals $\int_0^{\sqrt{\pi}} \sin(x^2)dx$ den Wert: $A_{16} = A_{32} = A_{64}$ = 0,8948 (gerundet auf vier Dezimalen hinter dem Komma) liefert.

V. Nehmen wir den Wert A_{64} = 0,8948 als exakt an, so ergibt sich für die einfache Simpsonregel (Keplersche Fassregel) gegenüber der verketteten Simpsonregel eine Abweichung von:

$$\frac{|A_1-A_{64}|}{A_{64}}=\frac{|0{,}8355-0{,}8948|}{0{,}8948}=\frac{0{,}0593}{0{,}8948}\approx 0{,}0663$$ = 6,63 %.

www.michael-buhlmann.de / 06.2023 / Aufgabe 1878