Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Analysis
> (Uneigentliches) Integral

Aufgabe: Für jede natürliche Zahl n = 0, 1, 2, … ist die Funktion:

$$f_n(x) = x^n e^{-x}$$

gegeben.

a) Untersuche jede Funktion $f_n(x)$ auf Extrempunkte.

b) Zeige, dass für jede natürliche Zahl gilt:

$$\int_0^\infty x^n e^{-x} dx = n!$$

c) Zeige, dass für jede natürliche Zahl gilt:

$$\lim_{x\to\infty}\left(x^n e^{-x}\right) = 0.$$

Lösung: a) I. Es sei zunächst n = 0 mit $f_0(x) = e^{-x}$ als Exponentialfunktion. Die Ableitungen sind:
$f_0'(x) = -e^{-x}$, $f_0''(x) = e^{-x}$,
so dass wegen $f_0'(x) < 0$ keine Extrempunkte vorliegen.

II. Für n = 1, 2, … und damit $f_n(x) = x^n e^{-x}$ ergeben sich als Ableitungen nach der Produktregel:

$$(u(x)v(x))' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$$

und der Kettenregel (hier: $(e^{-x})' = e^{-x}\cdot(-1) = -e^{-x}$) die nachstehenden Rechenterme:
$f_n'(x) = nx^{n-1}e^{-x} + x^n(-e^{-x}) = (nx^{n-1}-x^n)e^{-x}$
$f_n''(x) = (n(n-1)x^{n-2}+nx^{n-1})e^{-x} + (nx^{n-1}-x^n)(-e^{-x}) = (n(n-1)x^{n-2}+nx^{n-1})e^{-x} - (nx^{n-1}-x^n)e^{-x}$.
Nullsetzen der 1. Ableitung führt auf die <u>Stellen mit waagerechter Tangente</u>:
$f_n'(x) = 0 \Leftrightarrow (nx^{n-1}-x^n)e^{-x} = 0 \Leftrightarrow nx^{n-1}-x^n = 0 \Leftrightarrow x^{n-1}(n-x) = 0 \Leftrightarrow x^{n-1} = 0, n-x = 0 \Leftrightarrow x = 0, x = n$.
An den Stellen x = 0, x = n besitzt also der Graph der Funktion $f_n(x)$ Punkte mit waagerechter Tangente. Für x = n berechnen wir durch Einsetzen der Stelle in die 2. Ableitung:
$f_n''(n) = (n(n-1)n^{n-2}+n\cdot n^{n-1})e^{-n} - (n\cdot n^{n-1}-n^n)e^{-x} = ((n-1)n^{n-1}+n^n)e^{-n} - 0 = (n\cdot n^{n-1}-n^{n-1}-n^n)e^{-n} =$
$(n^n-n^{n-1}-n^n)e^{-n} = (-n^{n-1})e^{-n} = -n^{n-1}e^{-n} < 0$,
so dass an der Stelle x = n die Funktion $f_n(x)$ einen Hochpunkt mit:

$$f_n(n) = n^n e^{-n} = \left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

Jeder <u>Hochpunkt</u> hat also die Form: $H(n|\left(\frac{n}{e}\right)^n)$ für alle natürliche Zahlen n = 1, 2, …

III. Für natürliche Zahlen n > 1 ergibt das Einsetzen von x = 0 in die 2. Ableitung:
$f_n''(0) = (n(n-1)\cdot 0^{n-2}+n\cdot 0^{n-1})e^{-0} - (n\cdot 0^{n-1}-0^n)e^{-0} = 0$,

so dass eine Entscheidung, ob ein Extrempunkt vorliegt, nicht getroffen werden kann. Wir verwenden daher das Kriterium des Vorzeichenwechsels der 1. Ableitung. Für die Stelle x = 0 ist dabei noch zwischen ungeraden und geraden natürlichen Zahlen n = 1, 2, … zu unterscheiden. Für ungerade natürliche Zahlen n = 1, 3, … und daher gerade natürliche Zahlen n-1 = 0, 2, … haben wir, indem wir die 1. Ableitung an der Stelle x = -1 und (wegen des Hochpunktes H(1|1/e)) x = 0,5 betrachten:

$f_n'(-1) = (n\cdot(-1)^{n-1} - (-1)^n)e^{-(-1)} = (n\cdot 1-(-1))e^1 = (n+1)e > 0$
$f_n'(0{,}5) = (n\cdot 0{,}5^{n-1} - 0{,}5^n)e^{-0{,}5} = (n-0{,}5)\cdot 0{,}5^{n-1}\cdot e^{-0{,}5} > 0.$

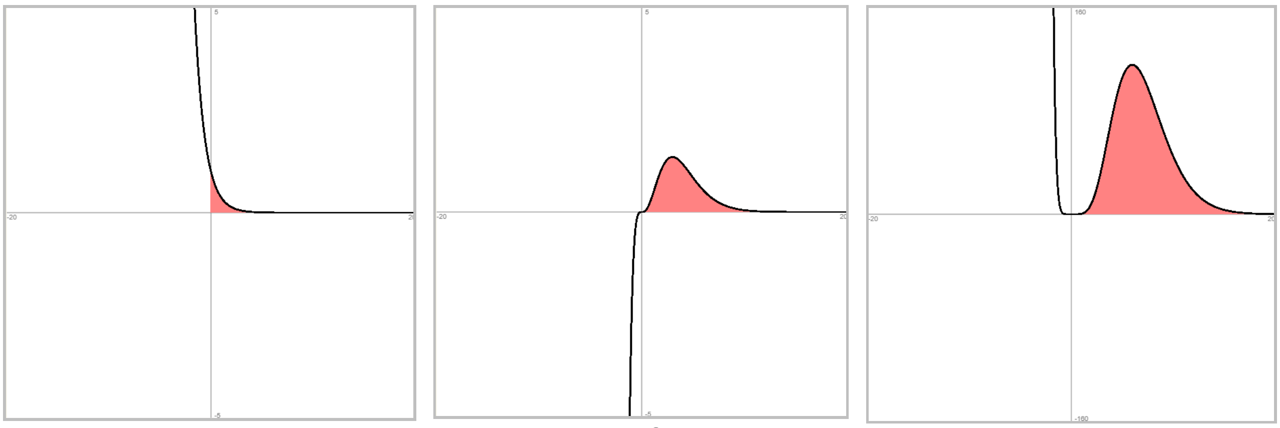
Es gibt keinen Vorzeichenwechsel; statt eines Extrempunktes besitzt die Funktion $f_n(x)$ für n = 1 eine Nullstelle N(0|0), für n = 3, 5, … einen Sattelpunkt W(0|0).
Für gerade natürliche Zahlen n = 2, 4, … und daher ungerade natürliche Zahlen n-1 = 1, 3, … ergibt sich bei Auswertung der 1. Ableitung an den Stellen x = -1 und x = 1 (möglich wegen des Hochpunktes $H(2|4/e^2)$):

$f_n'(-1) = (n\cdot(-1)^{n-1} - (-1)^n)e^{-(-1)} = (n\cdot(-1)-1)e^1 = (-n-1)e < 0$
$f_n'(1) = (n\cdot 1^{n-1} - 1^n)e^{-(-1)} = (n\cdot 1-1)e^1 = (n-1)e > 0$

ein Vorzeichenwechsel von Minus nach Plus, so dass als Extrempunkt ein Tiefpunkt mit:

$f_n(0) = 0^n e^{-0} = 0$

vorliegt. Für alle geraden natürlichen Zahlen n = 2, 4, … besitzt die Funktion $f_n(x)$ damit den Tiefpunkt T(0|0).



n=0 n=3 n=6

b) I. Mit dem Integral $\int_0^\infty x^n e^{-x}dx$ über die Funktion $f_n(x) = x^n e^{-x}$ liegt ein uneigentliches Integral (1. Art) vor, d.h.: die Bestimmung des (existierenden) Integralwertes erfolgt über den Grenzprozess:

$$\int_0^\infty f_n(x)dx = \lim_{u->\infty} \int_0^u f_n(x)dx .$$

Weiter benötigen wir noch die Regel zur Produkt- oder partieller Integration:

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)dx .$$

II. Es soll die Identität $\int_0^\infty x^n e^{-x}dx$ = n! (*) für alle natürliche Zahlen n = 0, 1, 2, … nachgewiesen werden (mit n! = 1·2·3·…·n als n Fakultät und 0! =1). Wir gehen nach dem Beweisverfahren der vollständigen Induktion vor und haben als Induktionsanfang für n=0:

$$\int_0^\infty f_0(x)dx = \int_0^\infty e^{-x}dx = \lim_{u->\infty}\int_0^u e^{-x}dx = \lim_{u->\infty}\left[-e^{-x}\right]_0^u = \lim_{u->\infty}(-e^{-u}) - (-e^{-0}) = \lim_{u->\infty}(-e^{-u}) + 1 = 0+1 = 1 = 0!,$$

womit (*) für den Induktionsanfang greift. Wir nehmen nun an, $\int_0^\infty x^n e^{-x} dx$ = n! (*) gelte für ein gewisses n (Induktionsbehauptung), und führen den <u>Induktionsschritt</u> als Nachweis von (*) für n+1 durch:

$$\int_0^\infty f_{n+1}(x)dx = \int_0^\infty x^{n+1}e^{-x}dx = \lim_{u->\infty}\int_0^u x^{n+1}e^{-x}dx = \lim_{u->\infty}\left[x^{n+1}\cdot(-e^{-x})\right]_0^u - \lim_{u->\infty}\int_0^u (n+1)x^n(-e^{-x})dx =$$

$$\lim_{u->\infty}\left[-x^{n+1}\cdot e^{-x}\right]_0^u + (n+1)\lim_{u->\infty}\int_0^u x^n e^{-x}dx = \lim_{u->\infty}\left(-u^{n+1}\cdot e^{-u}\right) - (-0^{n+1}\cdot e^{-0}) + (n+1)\int_0^\infty x^n e^{-x}dx =$$

$$0 + 0 + (n+1)\int_0^\infty x^n e^{-x}dx = (n+1)\int_0^\infty x^n e^{-x}dx \underset{(*)}{=} (n+1)\cdot n! = (n+1)!$$

Damit ist die Identität (*) auch für n+1 nachgewiesen. Insgesamt gilt die Formel (*) für alle natürliche Zahlen n = 0, 1, 2, …, was zu beweisen war.

c) I. Laut b) existiert das uneigentliche Integral der Funktionen $f_n(x) = x^n e^{-x}$ mit Integralwert $\int_0^\infty x^n e^{-x}dx$ = n! für alle natürlichen Zahlen n = 0, 1, 2, … <u>Notwendig für die Existenz des Integrals</u> ist, dass gilt:

x -> ∞: $f_n(x) = x^n e^{-x}$ -> 0,

womit

$\lim_{x\to\infty}\left(x^n e^{-x}\right)$ = 0

für jede natürliche Zahl nachgewiesen ist.

II. Alternativ lässt sich die <u>Regel von de l'Hospital</u> (vom Typ $\frac{\infty}{\infty}$) anwenden, wonach für zwei differenzierbare Funktionen u(x) und v(x) mit x -> ∞: u(x), v(x) -> ∞ bei existierendem Grenzwert gilt:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{u(x)}{v(x)} = \lim_{x\to\infty}\frac{u'(x)}{v'(x)}.$$

Wir wenden die Regel bei $u_n(x) = x^n$ (mit natürlichen Zahlen n = 0, 1, 2, …) und $v(x) = e^x$ mit x -> ∞: $u_n(x)$, v(x) -> ∞ insgesamt n Mal an und haben:

$$\lim_{x\to\infty}\left(x^n e^{-x}\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{x^n}{e^x} \underset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{nx^{n-1}}{e^x} \underset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{n(n-1)x^{n-2}}{e^x} \underset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \dots \underset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{n!}{e^x} = 0$$

und damit das Gewünschte.

www.michael-buhlmann.de / 09.2024 / Aufgabe 2179