

Mathematikaufgaben

> Analysis

> (Uneigentliches) Integral

Aufgabe: Zeige, dass für das nachstehende (uneigentliche) Integral gilt:

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Lösung: I. Mit dem Integral $\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx$ über die Funktion $f(x) = e^{-x^2}$ (Gaußsche Glockenkurve) liegt ein uneigentliches Integral (1. Art) vor, im Folgenden wird aber die Integralgrenze ∞ wie eine reelle Zahl behandelt, mithin die Richtigkeit von Grenzprozessen im Zusammenhang mit dem uneigentlichen Integral vorausgesetzt.

II. Es sei: $I = \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx$, so dass für das Quadrat des Integrals gilt:

$$I^2 = \left(\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx \right)^2 = \left(\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx \right) \cdot \left(\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx \right) \stackrel{(1)}{=} \left(\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx \right) \cdot \left(\int_0^{\infty} e^{-y^2} dy \right) \stackrel{(2)}{=} \int_0^{\infty} \left(\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx \right) \cdot e^{-y^2} dy =$$

$$\int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-x^2} e^{-y^2} dx dy = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-x^2-y^2} dx dy = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-(x^2+y^2)} dx dy \stackrel{(3)}{=} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{\infty} e^{-r^2} d\varphi r dr = \int_0^{\infty} e^{-r^2} r \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi dr =$$

$$\int_0^{\infty} e^{-r^2} r \cdot [\varphi]_{\varphi=0}^{\varphi=\frac{\pi}{2}} dr = \int_0^{\infty} e^{-r^2} r \cdot \left(\frac{\pi}{2} - 0 \right) dr = \frac{\pi}{2} \int_0^{\infty} e^{-r^2} r dr \stackrel{(4)}{=} \frac{\pi}{2} \int_0^{\infty} e^u \cdot \left(-\frac{1}{2} \right) du =$$

$$\frac{\pi}{4} \int_{-\infty}^0 e^u du = \frac{\pi}{4} [e^u]_{u=-\infty}^{u=0} = \frac{\pi}{4} (e^0 - e^{-\infty}) = \frac{\pi}{4} (1 - 0) = \frac{\pi}{4}$$

gemäß:

(1): Umbenennung $y = x$ im Integral des 2. Faktors des Quadrats $\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \int_0^{\infty} e^{-y^2} dy$

(2): Faktorregel bei Integration mit Faktor $\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx$

(3): Übergang zu Polarkoordinaten: $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi \Rightarrow$

$$e^{-(x^2+y^2)} = e^{-((r \cos \varphi)^2 + (r \sin \varphi)^2)} = e^{-(r^2 \cos^2 \varphi + r^2 \sin^2 \varphi)} = e^{-r^2 (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi)} = e^{-r^2}$$

(4): Substitution: $u = -r^2$, $du = -2r dr \Rightarrow r dr = -\frac{1}{2} du$.

Es ist also: $I^2 = \frac{\pi}{4}$, so dass Wurzelziehen das Gewünschte ergibt:

$$I = \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Über ein Doppelintegral konnte also der Wert des eindimensionalen uneigentlichen Integrals bestimmt werden.