

Mathematikaufgaben

> Analysis

> (Bestimmtes) Integral

Aufgabe: Zu berechnen ist das bestimmte Integral:

$$\int_1^{e^\pi} \frac{\sin(\ln(x))}{x} dx.$$

1. Lösung: I. Zentral für die Berechnung des unbestimmten Integrals, der Stammfunktion $F(x)$ des Integranden $f(x) = \frac{\sin(\ln(x))}{x}$ ist die Substitutionsmethode bei der Integration. Es gilt:

$$\int \frac{\sin(\ln(x))}{x} dx = \int \sin(\ln(x)) \cdot \frac{1}{x} dx \stackrel{\substack{u=\ln(x) \\ \left\{ \frac{du}{dx} = \frac{1}{x} \Rightarrow du = \frac{1}{x} dx \right\}}}{=} \int \sin(u) du = -\cos(u) \stackrel{\{u=\ln(x)\}}{=} -\cos(\ln(x))$$

auf Grund einer passenden Substitution und Resubstitution, so dass sich als Stammfunktion ergibt:
 $F(x) = -\cos(\ln(x)).$

II. Mit Hilfe der Stammfunktion $F(x)$ errechnet sich das gesuchte bestimmte Integral als:

$$\begin{aligned} \int_1^{e^\pi} \frac{\sin(\ln(x))}{x} dx &= [-\cos(\ln(x))]_1^{e^\pi} = -\cos(\ln(e^\pi)) - (-\cos(\ln(1))) = \\ &= -\cos(\pi) + \cos(0) = -(-1) + 1 = 2. \end{aligned}$$

2. Lösung: Nachfolgend wird direkt das bestimmte Integral auf Grund einer passenden Substitution, die auch die Integralgrenzen betrifft, (ohne Resubstitution) ermittelt. Es gilt:

$$\int_1^{e^\pi} \frac{\sin(\ln(x))}{x} dx = \int_1^{e^\pi} \sin(\ln(x)) \cdot \frac{1}{x} dx \stackrel{\substack{u=\ln(x) \\ \left\{ \begin{array}{l} x=1 \Rightarrow u=\ln(1)=0 \\ x=e^\pi \Rightarrow u=\ln(e^\pi)=\pi \end{array} \right\}}}{=} \int_0^\pi \sin(u) du$$

$$\int_0^\pi \sin(u) du = [-\cos(u)]_0^\pi = -\cos(\pi) + \cos(0) = -(-1) + 1 = 2.$$

Es ergibt sich als Wert des bestimmten Integrals: $\int_1^{e^\pi} \frac{\sin(\ln(x))}{x} dx = 2.$

