

Mathematikaufgaben

> Analysis

> (Uneigentliches) Integral

Aufgabe: Zu berechnen ist das (uneigentliche) Integral:

$$\int_0^1 \ln(x) dx.$$

1. Lösung: I. Zentral für die Berechnung des unbestimmten Integrals, der Stammfunktion $F(x)$ des Integranden $f(x) = \ln(x)$ ist die partielle Integration (Produktintegration). Es gilt:

$$\int \ln(x) dx = \int 1 \cdot \ln(x) dx \stackrel{\left\{ \begin{array}{l} u'(x)=1 \Rightarrow u(x)=x \\ v(x)=\ln(x) \Rightarrow v'(x)=\frac{1}{x} \end{array} \right\}}{=} x \cdot \ln(x) - \int x \cdot \frac{1}{x} dx = x \cdot \ln(x) - \int 1 dx = x \cdot \ln(x) - x,$$

so dass sich als Stammfunktion ergibt:

$$F(x) = x \cdot \ln(x) - x.$$

II. Für den Wert des uneigentlichen Integrals $\int_0^1 \ln(x) dx$ folgt mit Hilfe der gefundenen Stammfunktion sowie nach den Regeln von de l'Hospital wegen der Polstelle $x = 0$ der Logarithmusfunktion:

$$\int_0^1 \ln(x) dx = \lim_{u \rightarrow 0+} \int_u^1 \ln(x) dx = \lim_{u \rightarrow 0+} [x \cdot \ln(x) - x]_u^1 = (1 \cdot \ln(1) - 1) - \lim_{u \rightarrow 0+} (u \cdot \ln(u) - u) =$$

$$-1 - \lim_{u \rightarrow 0+} (u \cdot \ln(u)) - 0 = -1 - \lim_{u \rightarrow 0+} \frac{\ln(u)}{\frac{1}{u}} \stackrel{\left\{ \begin{array}{l} \text{l'Hospital:} \\ \frac{-\infty}{\infty} \end{array} \right\}}{=} -1 - \lim_{u \rightarrow 0+} \frac{\frac{1}{u}}{-\frac{1}{u^2}} = -1 - \lim_{u \rightarrow 0+} \frac{-u^2}{u} = -1 - \lim_{u \rightarrow 0+} (-u) =$$

$$-1 - 0 = -1,$$

$$\text{also: } \int_0^1 \ln(x) dx = -1.$$

2. Lösung: I. Der sog. Feynman-Trick ist auf ein (bestimmtes, auch uneigentliches Integral)

$\int_a^b f(x) dx$ anwendbar, wenn eine von einem reellen Parameter p abhängige Funktionenschar $g_p(x)$

$= g(p, x)$ gefunden werden kann, deren partielle Ableitung $\frac{\partial g(p, x)}{\partial p}$ unter dem (lösbaren) Integral

$I(p) = \int_a^b g(p, x) dx$ für einen bestimmten Parameter $p=p_0$ mit dem Integranden $f(x)$ identisch ist. Es gilt damit:

$$I(p) = \int_a^b g(p, x) dx, \quad I'(p) = \int_a^b \frac{\partial g(p, x)}{\partial p} dx, \quad I'(p_0) = \int_a^b f(x) dx,$$

auch ohne eine Stammfunktion $F(x)$ von $f(x)$ zu kennen (falls diese überhaupt geschlossen darstellbar existiert).

II. Eine dem Integral $\int_0^1 \ln(x) dx$ angemessene Funktionenschar ist: $g(p, x) = x^p$, so dass

$$I(p) = \int_0^1 x^p dx = \left[\frac{1}{p+1} x^{p+1} \right]_0^1 = \frac{1}{p+1} \cdot 1^{p+1} - \frac{1}{p+1} \cdot 0^{p+1} = \frac{1}{p+1}$$

folgt ($p \neq -1$). Durch Ableiten bzw. partielles Ableiten unter dem Integral erhalten wir:

$$I(p) = \int_0^1 x^p dx = \frac{1}{p+1} \Rightarrow I'(p) = -\frac{1}{(p+1)^2}.$$

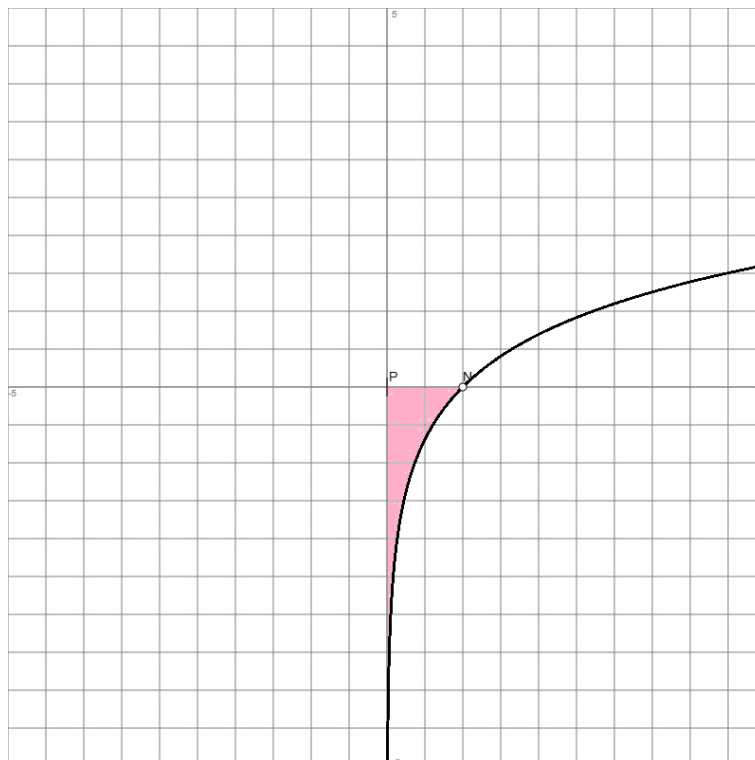
$$I(p) = \int_0^1 x^p dx = \frac{1}{p+1} \Rightarrow I'(p) = \int_0^1 \frac{\partial x^p}{\partial p} dx = \int_0^1 x^p \cdot \ln(x) dx.$$

Damit ist für $p = 0$:

$$I'(0) = \int_0^1 x^0 \cdot \ln(x) dx = \int_0^1 \ln(x) dx = -\frac{1}{(0+1)^2} = -1.$$

Es ergibt sich als Wert des uneigentlichen Integrals:

$$\int_0^1 \ln(x) dx = -1.$$



www.michael-buhlmann.de / 08.2025 / Aufgabe 2483