

Mathematikaufgaben

> Analysis

> (Uneigentliches) Integral

Aufgabe: Zu berechnen ist das (uneigentliche) Integral:

$$\int_0^1 x^n \cdot \ln(x) dx$$

für alle natürlichen Zahlen $n = 1, 2, 3, \dots$

1. Lösung: I. Zentral für die Berechnung des unbestimmten Integrals, der Stammfunktion $F(x)$ des Integranden $f(x) = x^n \cdot \ln(x)$ ist die partielle Integration (Produktintegration). Es gilt:

$$\begin{aligned} \int x^n \cdot \ln(x) dx &= \left\{ \begin{array}{l} u'(x) = x^n \Rightarrow u(x) = \frac{1}{n+1} x^{n+1} \\ v(x) = \ln(x) \Rightarrow v'(x) = \frac{1}{x} \end{array} \right\} \frac{1}{n+1} x^{n+1} \cdot \ln(x) - \int \frac{1}{n+1} x^{n+1} \cdot \frac{1}{x} dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} \cdot \ln(x) - \int \frac{1}{n+1} x^n dx = \\ &= \frac{1}{n+1} x^{n+1} \cdot \ln(x) - \frac{1}{n+1} \int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} \cdot \ln(x) - \frac{1}{n+1} \cdot \frac{1}{n+1} x^{n+1} = \frac{1}{n+1} x^{n+1} \cdot \left(\ln(x) - \frac{1}{n+1} \right) \end{aligned}$$

so dass sich als Stammfunktion ergibt:

$$F(x) = \frac{1}{n+1} x^{n+1} \cdot \left(\ln(x) - \frac{1}{n+1} \right).$$

II. Für den Wert des uneigentlichen Integrals $\int_0^1 x^n \cdot \ln(x) dx$ folgt mit Hilfe der gefundenen Stammfunktion sowie nach den Regeln von de l'Hospital wegen der Lücke $x = 0$ des Integranden $f(x)$:

$$\begin{aligned} \int_0^1 x^n \cdot \ln(x) dx &= \lim_{u \rightarrow 0^+} \int_u^1 x^n \cdot \ln(x) dx = \lim_{u \rightarrow 0^+} \left[\frac{1}{n+1} x^{n+1} \cdot \left(\ln(x) - \frac{1}{n+1} \right) \right]_u^1 = \\ &= \left(\frac{1}{n+1} \cdot 1^{n+1} \cdot \left(\ln(1) - \frac{1}{n+1} \right) \right) - \lim_{u \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{n+1} u^{n+1} \cdot \left(\ln(u) - \frac{1}{n+1} \right) \right) = \\ &= \left(\frac{1}{n+1} \cdot \left(0 - \frac{1}{n+1} \right) \right) - \lim_{u \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{n+1} u^{n+1} \cdot \ln(u) \right) + \lim_{u \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{(n+1)^2} u^{n+1} \right) = \\ &= -\frac{1}{(n+1)^2} - \frac{1}{n+1} \cdot \lim_{u \rightarrow 0^+} (u^{n+1} \cdot \ln(u)) + 0 = -\frac{1}{(n+1)^2} - \frac{1}{n+1} \cdot \lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{\ln(u)}{\frac{1}{u^{n+1}}} \stackrel{\text{l'Hospital}}{=} \\ &= -\frac{1}{(n+1)^2} - \frac{1}{n+1} \cdot \lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{u}}{\frac{-n+1}{u^{n+2}}} = -\frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+1)^2} \cdot \lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{u^{n+2}}{u} = \\ &= -\frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+1)^2} \cdot \lim_{u \rightarrow 0^+} u^{n+1} = -\frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+1)^2} \cdot 0 = -\frac{1}{(n+1)^2}, \end{aligned}$$

$$\text{also: } \int_0^1 x^n \cdot \ln(x) dx = -\frac{1}{(n+1)^2}, n = 1, 2, 3, \dots$$

2. Lösung: I. Der sog. Feynman-Trick ist auf ein (bestimmtes, auch uneigentliches Integral)

$\int_a^b f(x) dx$ anwendbar, wenn eine von einem reellen Parameter p abhängige Funktionenschar $g_p(x)$

$= g(p, x)$ gefunden werden kann, deren partielle Ableitung $\frac{\partial g(p, x)}{\partial p}$ unter dem (lösbaren) Integral

$I(p) = \int_a^b g(p, x) dx$ für einen bestimmten Parameter $p=p_0$ mit dem Integranden $f(x)$ identisch ist. Es gilt damit:

$$I(p) = \int_a^b g(p, x) dx, \quad I'(p) = \int_a^b \frac{\partial g(p, x)}{\partial p} dx, \quad I'(p_0) = \int_a^b f(x) dx,$$

auch ohne eine Stammfunktion $F(x)$ von $f(x)$ zu kennen (falls diese überhaupt geschlossen darstellbar existiert).

II. Eine dem Integral $\int_0^1 x^n \cdot \ln(x) dx$ angemessene Funktionenschar ist: $g(p, x) = x^p$, so dass

$$I(p) = \int_0^1 x^p dx = \left[\frac{1}{p+1} x^{p+1} \right]_0^1 = \frac{1}{p+1} \cdot 1^{p+1} - \frac{1}{p+1} \cdot 0^{p+1} = \frac{1}{p+1}$$

folgt ($p \neq -1$). Durch Ableiten bzw. partielles Ableiten unter dem Integral erhalten wir:

$$I(p) = \int_0^1 x^p dx = \frac{1}{p+1} \Rightarrow I'(p) = -\frac{1}{(p+1)^2}.$$

$$I(p) = \int_0^1 x^p dx = \frac{1}{p+1} \Rightarrow I'(p) = \int_0^1 \frac{\partial x^p}{\partial p} dx = \int_0^1 x^p \cdot \ln(x) dx.$$

Damit ist für $p = n$ mit natürlicher Zahl n :

$$I'(n) = \int_0^1 x^n \cdot \ln(x) dx = -\frac{1}{(n+1)^2},$$

$$\text{also: } \int_0^1 x^n \cdot \ln(x) dx = -\frac{1}{(n+1)^2}, n = 1, 2, 3, \dots$$

III. Allgemein gilt für beliebige reelle $p > -1$:

$$\int_0^1 x^p \cdot \ln(x) dx = -\frac{1}{(p+1)^2},$$

$$\text{so dass etwa bei } p = 0,5 \text{ gilt: } \int_0^1 \sqrt{x} \cdot \ln(x) dx = -\frac{4}{9}.$$

Für $p \leq -1$ existiert das uneigentliche Integral $\int_0^1 x^p \cdot \ln(x) dx$ im Übrigen nicht.