

Mathematikaufgaben

> Analysis

> (Uneigentliches) Integral

Aufgabe: Zu berechnen ist das (uneigentliche) Integral:

$$\int_0^1 x^n \cdot \ln^m(x) dx$$

für alle natürlichen Zahlen $m, n = 1, 2, 3, \dots$

Lösung: I. Der sog. Feynman-Trick ist auf ein (bestimmtes, auch uneigentliches Integral) $\int_a^b f(x) dx$ anwendbar, wenn eine von einem reellen Parameter p abhängige Funktionenschar $g_p(x) = g(p, x)$ gefunden werden kann, deren partielle Ableitung $\frac{\partial g(p, x)}{\partial p}$ unter dem (lösbaren) Integral

$I(p) = \int_a^b g(p, x) dx$ für einen bestimmten Parameter $p=p_0$ mit dem Integranden $f(x)$ identisch ist. Es gilt damit:

$$I(p) = \int_a^b g(p, x) dx, \quad I'(p) = \int_a^b \frac{\partial g(p, x)}{\partial p} dx, \quad I'(p_0) = \int_a^b f(x) dx,$$

auch ohne eine Stammfunktion $F(x)$ von $f(x)$ zu kennen (falls diese überhaupt geschlossen darstellbar existiert). Mitunter – siehe das Folgende – sind noch weitere Ableitungen in Betracht zu ziehen, also:

$$I''(p) = \int_a^b \frac{\partial^2 g(p, x)}{\partial p^2} dx, \quad I'''(p) = \int_a^b \frac{\partial^3 g(p, x)}{\partial p^3} dx \quad \text{usw.}$$

II. Eine dem Integral $\int_0^1 x^n \cdot \ln^m(x) dx$ angemessene Funktionenschar ist: $g(p, x) = x^p$, so dass

$$I(p) = \int_0^1 x^p dx = \left[\frac{1}{p+1} x^{p+1} \right]_0^1 = \frac{1}{p+1} \cdot 1^{p+1} - \frac{1}{p+1} \cdot 0^{p+1} = \frac{1}{p+1}$$

folgt ($p \neq -1$). Durch mehrfaches Ableiten bzw. mehrfaches partielles Ableiten unter dem Integral erhalten wir:

$$I(p) = \int_0^1 x^p dx = \frac{1}{p+1} \Rightarrow I'(p) = -\frac{1}{(p+1)^2} \Rightarrow I''(p) = \frac{2}{(p+1)^3} \Rightarrow \dots \Rightarrow I^{(m)}(p) = \frac{(-1)^m \cdot m!}{(p+1)^{m+1}}.$$

$$I(p) = \int_0^1 x^p dx = \frac{1}{p+1} \Rightarrow I'(p) = \int_0^1 \frac{\partial x^p}{\partial p} dx = \int_0^1 x^p \cdot \ln(x) dx \Rightarrow$$

$$I''(p) = \int_0^1 \frac{\partial x^p \cdot \ln(x)}{\partial p} dx = \int_0^1 x^p \cdot \ln^2(x) dx \Rightarrow \dots \Rightarrow I^{(m)}(p) = \int_0^1 x^p \cdot \ln^m(x) dx.$$

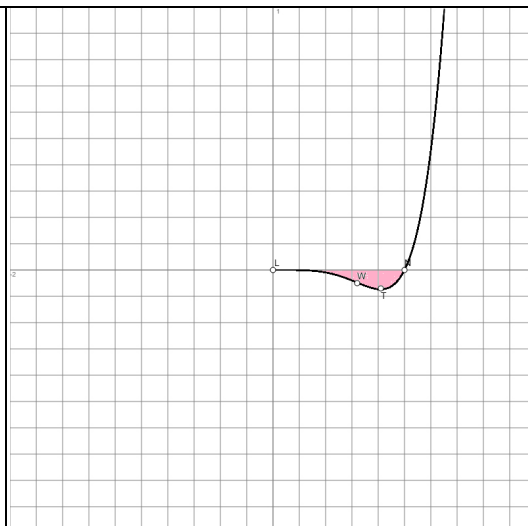
Damit ist für $p = n$ mit natürlicher Zahl n und unter Betrachtung der m . Ableitung $I^{(m)}(p)$:

$$I^{(m)}(n) = \int_0^1 x^n \cdot \ln^m(x) dx = \frac{(-1)^m \cdot m!}{(n+1)^{m+1}},$$

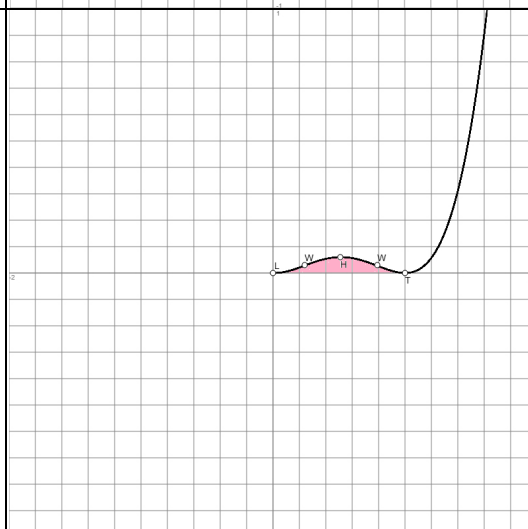
also: $\int_0^1 x^n \cdot \ln^m(x) dx = \frac{(-1)^m \cdot m!}{(n+1)^{m+1}}, m, n = 1, 2, 3, \dots$

III. Wir ergänzen die gefundene Formel: $\int_0^1 x^n \cdot \ln^m(x) dx = \frac{(-1)^m \cdot m!}{(n+1)^{m+1}}$ noch durch einige Beispiele:

a) $\int_0^1 x^5 \cdot \ln(x) dx = -\frac{1}{36} \quad (m=1, n=5)$



b) $\int_0^1 x^3 \cdot \ln^2(x) dx = \frac{1}{32} \quad (m=2, n=3)$



c) $\int_0^1 x \cdot \ln^4(x) dx = \frac{1}{2} \quad (m=4, n=1)$

