

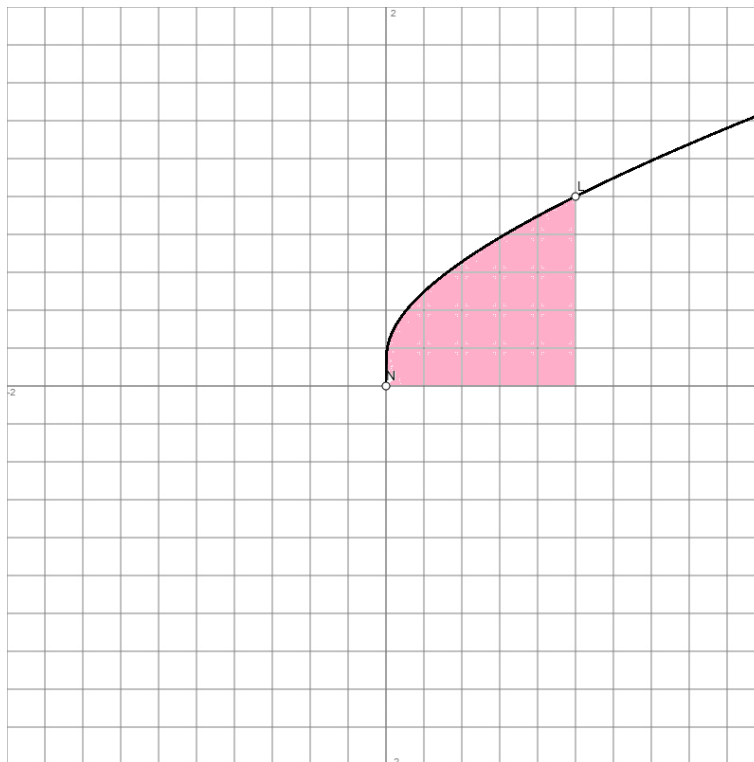
Mathematikaufgaben

> Analysis

> (Uneigentliches) Integral

Aufgabe: Zu berechnen ist das (uneigentliche) Integral:

$$\int_0^1 \frac{x-1}{\ln(x)} dx.$$



Lösung: I. Der sog. Feynman-Trick ist auf ein (bestimmtes, auch uneigentliches Integral) $\int_a^b f(x) dx$ anwendbar, wenn eine von einem reellen Parameter p abhängige Funktionenschar $g_p(x) = g(p, x)$ gefunden werden kann, die für ein gewisses p_0 den Integranden $f(x) = g(p_0, x)$ darstellt. Es gilt damit:

$$I(p) = \int_a^b g(p, x) dx, \quad I(p_0) = \int_a^b f(x) dx.$$

Die partielle Ableitung $\frac{\partial g(p, x)}{\partial p}$ unter dem Integral $I(p) = \int_a^b g(p, x) dx$ lautet: $I'(p) = \int_a^b \frac{\partial g(p, x)}{\partial p} dx$ und stellt bei richtiger Wahl der Funktionenschar $g(p, x)$ meist ein einfach zu berechnendes Integral dar, auf Grund dessen (etwa durch Rückintegration) das Integral $\int_a^b f(x) dx$ gelöst werden kann.

II. Eine dem Integral $\int_0^1 \frac{x-1}{\ln(x)} dx$ angemessene Funktionenschar ist: $g(p,x) = \frac{x^p - 1}{\ln(x)}$, so dass

$$I(p) = \int_0^1 \frac{x^p - 1}{\ln(x)} dx$$

folgt ($p \geq 0$) und (bei $p=p_0=1$) $I(1) = \int_0^1 \frac{x-1}{\ln(x)} dx$ gilt. Durch partielles Ableiten unter dem Integral erhalten wir:

$$I(p) = \int_0^1 \frac{x^p - 1}{\ln(x)} dx \Rightarrow I'(p) = \int_0^1 \frac{\partial \left(\frac{x^p - 1}{\ln(x)} \right)}{\partial p} dx = \int_0^1 \frac{\partial(x^p - 1)}{\partial p} \cdot \frac{1}{\ln(x)} dx = \int_0^1 x^p \cdot \ln(x) \cdot \frac{1}{\ln(x)} dx =$$

$$\int_0^1 x^p dx = \left[\frac{1}{p+1} x^{p+1} \right]_0^1 = \frac{1}{p+1} \cdot 1^{p+1} - \frac{1}{p+1} \cdot 0^{p+1} = \frac{1}{p+1}.$$

Umgekehrt folgt durch Integration:

$$I'(p) = \frac{1}{p+1} \Rightarrow I(p) = \int \frac{1}{p+1} dp = \ln(p+1) + C,$$

wobei die Integrationskonstante sich errechnet als:

$$I(0) = \int_0^1 \frac{x^0 - 1}{\ln(x)} dx = \int_0^1 0 dx = 0 \Rightarrow I(0) = 0 = \ln(0+1) + C = 0 + C \Rightarrow C = 0.$$

Es ist damit: $I(p) = \ln(p+1)$, so dass (mit $p=p_0=1$) gilt:

$$I(1) = \int_0^1 \frac{x-1}{\ln(x)} dx = \ln(1+1) = \ln(2).$$

Damit ist der Wert des Integrals $\int_0^1 \frac{x-1}{\ln(x)} dx = \ln(2)$ bestimmt.