

Mathematikaufgaben

> Analysis

> (Unbestimmtes) Integral

Aufgabe: In der US-amerikanischen Sitcom „The Big Bang Theory“ fragt im Beisein des Experimentalphysikers Dr. Leonard Hofstadter und des Astrophysikers Dr. Rajesh Koothrappali der geniale theoretische Physiker Dr. Dr. Sheldon Cooper den Raumfahrt-Ingenieur Howard Wolowitz – alle vier nerdige Freunde arbeiten an der Caltech in Pasadena –, wie das Integral

$$\int x^2 e^{-x} dx$$

zu lösen sei. Wolowitz antwortet zur Überraschung Coopers richtig mit dem Verweis auf die Differentiation unter dem Integralzeichen und damit auf den „Trick“ des (realen) Physikers und Quantentheoretikers Richard Feynman (†1988).

Erläutere, wie mit dem Feynman-Trick das in der Sitcom vorkommende unbestimmte Integral gelöst werden kann.

Spoileralarm: Im „The Big Bang Theory“-Spin off „Young Sheldon“ erfährt das zehnjährige Genie Sheldon erstmals (wenn auch nur indirekt) von dem Feynman-Trick vom „Wunderkind“ Paige; beide trafen im Rahmen einer Vorlesung zur „Quantenchromodynamik“ an der (ausgedachten) East Texas Tech (University) aufeinander.

1. Lösung: I. Der sog. Feynman-Trick ist auf ein (unbestimmtes) $\int f(x)dx$ anwendbar, wenn eine von einem reellen Parameter p abhängige Funktionenschar $g_p(x) = g(p,x)$ gefunden werden kann, so dass:

$$I(p) = \int g(p,x)dx, \quad I'(p) = \int \frac{\partial g(p,x)}{\partial p} dx, \quad I''(p) = \int \frac{\partial^2 g(p,x)}{\partial p^2} dx, \dots$$

gilt mit partiellen Ableitungen $\frac{\partial g(p,x)}{\partial p}, \frac{\partial^2 g(p,x)}{\partial p^2}, \dots$ unter dem Integral $I(p) = \int g(p,x)dx$ nach p , Ableitungen nach p bzw. (einfachen) Integrationen nach x . Lässt sich für ein gewisses $p=p_0$ die Funktion $f(x)$ mit einem der Integrale $I(p), I'(p), I''(p), \dots$ in Beziehung setzen, so kann das Integral $\int f(x)dx$ bestimmt werden.

II. Eine dem Integral $\int x^2 e^{-x} dx$ angemessene Funktionenschar ist: $g(p,x) = e^{-px}$, so dass gilt:

$$I(p) = \int e^{-px} dx = -\frac{1}{p} e^{-px} \quad (\text{Integration nach } x)$$

$$I(p) = \int e^{-px} dx \Rightarrow I'(p) = \int \frac{\partial e^{-px}}{\partial p} dx = \int -x e^{-px} dx \quad ([\text{partiell}] \text{ Ableiten nach } p)$$

$$I(p) = -\frac{1}{p} e^{-px} = -\frac{e^{-px}}{p} \Rightarrow I'(p) = -\frac{-x e^{-px} p - e^{-px}}{p^2} = \frac{e^{-px}(1+px)}{p^2} \quad (\text{Ableiten nach } p)$$

$$I'(p) = \int -xe^{-px} dx \Rightarrow I''(p) = \int \frac{\partial(-xe^{-px})}{\partial p} dx = \int x^2 e^{-px} dx \quad ([\text{partielles}] \text{ Ableiten nach } p)$$

$$I'(p) = \frac{e^{-px}(1+px)}{p^2} \Rightarrow I''(p) = \frac{\left[-xe^{-px}(1+px) + xe^{-px} \right] p^2 - e^{-px}(1+px) \cdot 2p}{p^4} =$$

$$\frac{-px^2 e^{-px} p - 2e^{-px}(1+px)}{p^3} = -\frac{[p^2 x^2 + 2(1+px)]e^{-px}}{p^3} = -\frac{(p^2 x^2 + 2px + 2)e^{-px}}{p^3} \quad (\text{Ableiten nach } p).$$

Für $p=p_0=1$ folgt mit $I''(p) = \int x^2 e^{-px} dx$, $I''(p) = -\frac{(p^2 x^2 + 2px + 2)e^{-px}}{p^3}$ und $\int x^2 e^{-x} dx = I''(-1)$:

$$\int x^2 e^{-x} dx = -\frac{(1^2 \cdot x^2 + 2 \cdot 1 \cdot x + 2)e^{-x}}{1^3} = -(x^2 + 2x + 2)e^{-x}.$$

Damit ist das unbestimmte Integral als $\int x^2 e^{-x} dx = -(x^2 + 2x + 2)e^{-x}$ errechnet.

2. Lösung: I. Für unbestimmte Integrale vom Typ $\int x^n e^{rx} dx$, n als natürliche Zahl, r reell, gilt die explizite Darstellung einer Stammfunktion bzw. als unbestimmtes Integral:

$$\int x^n e^{rx} dx = \left(\sum_{k=0}^n (-1)^k \cdot \frac{n!}{(n-k)!} \cdot \frac{1}{r^{k+1}} \cdot x^{n-k} \right) e^{rx} = \frac{1}{r} \left(\sum_{k=0}^n (-1)^k \cdot \frac{n!}{(n-k)!} \cdot \frac{1}{r^k} \cdot x^{n-k} \right) e^{rx} \quad (*).$$

II. Mit $n=2$, $r=-1$ gilt gemäß (*):

$$\int x^2 e^{-x} dx = \frac{1}{-1} \left(\sum_{k=0}^2 (-1)^k \cdot \frac{2!}{(2-k)!} \cdot \frac{1}{(-1)^k} \cdot x^{2-k} \right) e^{-x} = - \left(\sum_{k=0}^2 \frac{2!}{(2-k)!} \cdot x^{2-k} \right) e^{-x} =$$

$$-(x^2 + 2x + 2)e^{-x}.$$

Mit der expliziten Formel (*) ist das unbestimmte Integral natürlich noch schneller zu berechnen.