

Mathematikaufgaben

> Analysis

> (Uneigentliches) Integral

Aufgabe: Berechne das (uneigentliche) Integral

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx.$$

Lösung: I. Der sog. Feynman-Trick ist auf ein (bestimmtes, uneigentliches, unbestimmtes) $\int f(x)dx$ anwendbar, wenn eine von einem reellen Parameter p abhängige Funktionenschar $g_p(x) = g(p, x)$ gefunden werden kann, so dass:

$$I(p) = \int g(p, x) dx, \quad I'(p) = \int \frac{\partial g(p, x)}{\partial p} dx, \dots$$

gilt mit partiellen Ableitungen $\frac{\partial g(p, x)}{\partial p}$, ... unter dem Integral $I(p) = \int g(p, x) dx$ nach p , Ableitungen nach p bzw. (einfachen) Integrationen nach x . Lässt sich für ein gewisses $p=p_0$ die Funktion $f(x)$ mit einem der Integrale $I(p)$, $I'(p)$, ... in Beziehung setzen, so kann das Integral $\int f(x) dx$ bestimmt werden.

II. Der Integrand $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$ besitzt bei $x = 0$ eine hebbare Unstetigkeitsstelle (uneigentliches Integral 2. Art), eine Integralgrenze ist ∞ (uneigentliches Integral 1. Art). Eine dem Integranden und dem Integral $\int_0^{\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx$ angemessene Funktionenschar ist: $g(p, x) = \frac{\sin(x)}{x} e^{-px}$, $p \geq 0$, so dass gilt:

$$I(p) = \int_0^{\infty} \frac{\sin(x)}{x} e^{-px} dx$$

$$\Rightarrow I'(p) = \int_0^{\infty} \frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{\sin(x)}{x} e^{-px} \right) dx = \int_0^{\infty} \frac{\sin(x)}{x} \cdot \frac{\partial e^{-px}}{\partial p} dx = \int_0^{\infty} \frac{\sin(x)}{x} \cdot e^{-px} \cdot (-x) dx = - \int_0^{\infty} \sin(x) e^{-px} dx.$$

III. Während $I'(p) = - \int_0^{\infty} \sin(x) e^{-px} dx$ durch partielles Ableiten nach p entsteht, führt das Aufleiten von $I'(p)$ nach x schließlich wieder auf $I(p)$. Dazu ist für $h(x) = \sin(x) e^{-px}$ zunächst die Stammfunktion wie folgt u.a. gemäß der Produktintegration zu bestimmen:

$$\int \sin(x) e^{-px} dx \stackrel{\left\{ \begin{array}{l} u'(x) = \sin(x) \Rightarrow u(x) = -\cos(x) \\ v(x) = e^{-px} \Rightarrow v'(x) = -pe^{-px} \end{array} \right\}}{=} -\cos(x) e^{-px} - \int (-\cos(x)) (-pe^{-px}) dx =$$

$$-\cos(x) e^{-px} - p \int \cos(x) e^{-px} dx \stackrel{\left\{ \begin{array}{l} u'(x) = \cos(x) \Rightarrow u(x) = \sin(x) \\ v(x) = e^{-px} \Rightarrow v'(x) = -pe^{-px} \end{array} \right\}}{=} -\cos(x) e^{-px} - p \left(\sin(x) e^{-px} - \int \sin(x) (-pe^{-px}) dx \right) =$$

$$\begin{aligned}
& -\cos(x)e^{-px} - p\left(\sin(x)e^{-px} + p\int \sin(x)e^{-px} dx\right) = -\cos(x)e^{-px} - p\sin(x)e^{-px} - p^2\int \sin(x)e^{-px} dx \\
& \Rightarrow \int \sin(x)e^{-px} dx = -\cos(x)e^{-px} - p\sin(x)e^{-px} - p^2\int \sin(x)e^{-px} dx \\
& \Rightarrow \int \sin(x)e^{-px} dx + p^2\int \sin(x)e^{-px} dx = -\cos(x)e^{-px} - p\sin(x)e^{-px} \\
& \Rightarrow (1+p^2)\int \sin(x)e^{-px} dx = -\cos(x)e^{-px} - p\sin(x)e^{-px} \\
& \Rightarrow \int \sin(x)e^{-px} dx = -\frac{\cos(x) + p\sin(x)}{1+p^2}e^{-px} = H(x).
\end{aligned}$$

IV. Nun ist:

$$\begin{aligned}
I'(p) &= -\int_0^\infty \sin(x)e^{-px} dx = -\left[-\frac{\cos(x) + p\sin(x)}{1+p^2}e^{-px}\right]_{x=0}^{x=\infty} = \left[\frac{\cos(x) + p\sin(x)}{1+p^2}e^{-px}\right]_{x=0}^{x=\infty} = \\
& 0 - \left(\frac{1+0}{1+p^2}e^0\right) = -\frac{1}{1+p^2}.
\end{aligned}$$

Integration von $I'(p)$ nach p ergibt dann mit dem Grundintegral $\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan(x)$:

$$I(p) = -\int \frac{1}{1+p^2} dp = -\arctan(p) + C.$$

Wegen $e^{-\infty} = 0$ ist $I(\infty) = \int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x} \cdot 0 dx = 0$ sowie:

$$I(\infty) = -\arctan(\infty) + C = -\frac{\pi}{2} + C = 0 \Leftrightarrow C = \frac{\pi}{2},$$

woraus folgt:

$$I(p) = -\arctan(p) + \frac{\pi}{2}.$$

Für $p=p_0=0$ folgt nun:

$$I(0) = \int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x} e^{-0x} dx = \int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x} dx = -\arctan(0) + \frac{\pi}{2} = 0 + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}.$$

Damit ist das uneigentliche Integral als $\int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x} dx = \frac{\pi}{2}$ errechnet.