

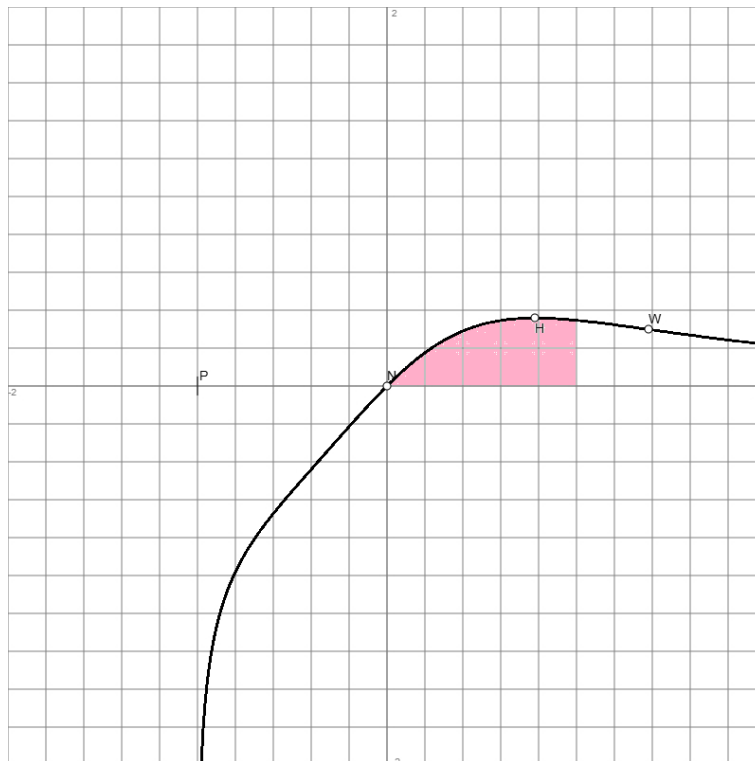
Mathematikaufgaben

> Analysis

> (Bestimmtes) Integral

Aufgabe: Berechne das (bestimmte) Integral

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2} dx.$$



Lösung: I. Der sog. Feynman-Trick ist auf ein (bestimmtes, uneigentliches, unbestimmtes) $\int f(x)dx$ anwendbar, wenn eine von einem reellen Parameter p abhängige Funktionenschar $g_p(x) = g(p,x)$ gefunden werden kann, so dass:

$$I(p) = \int g(p,x)dx, \quad I'(p) = \int \frac{\partial g(p,x)}{\partial p} dx, \dots$$

gilt mit partiellen Ableitungen $\frac{\partial g(p,x)}{\partial p}$, ... unter dem Integral $I(p) = \int g(p,x)dx$ nach p , Ableitungen nach p bzw. (einfachen) Integrationen nach x . Lässt sich für ein gewisses $p=p_0$ die Funktion $f(x)$ mit einem der Integrale $I(p)$, $I'(p)$, ... in Beziehung setzen, so kann das Integral $\int f(x)dx$ bestimmt werden.

II. Der Integrand $f(x) = \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}$ ist überall auf dem Intervall $[0; 1]$ differenzierbar. Eine dem Integ-

randen und dem Integral $\int_0^{\infty} \frac{\ln(1+x)}{1+x^2} dx$ angemessene Funktionenschar ist: $g(p,x) = \frac{\ln(1+px)}{1+x^2}$,

$p \geq 0$, so dass gilt:

$$I(p) = \int_0^1 \frac{\ln(1+px)}{1+x^2} dx$$

$$\Rightarrow I'(p) = \int_0^1 \frac{\partial \left(\frac{\ln(1+px)}{1+x^2} \right)}{\partial p} dx = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} \cdot \frac{\partial \ln(1+px)}{\partial p} dx = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} \cdot \frac{1}{1+px} \cdot x dx =$$

$$\int_0^1 \frac{x}{1+x^2} \cdot \frac{1}{1+px} dx = \int_0^1 \frac{x}{(1+x^2)(1+px)} dx$$

III. Während $I'(p) = \int_0^1 \frac{x}{(1+x^2)(1+px)} dx$ durch partielles Ableiten nach p entsteht, führt das Auflei-

ten von $I'(p)$ nach x schließlich wieder auf $I(p)$. Dazu ist für $h(x) = \frac{x}{(1+x^2)(1+px)}$ zunächst die

Stammfunktion wie folgt u.a. gemäß der Partialbruchzerlegung zu bestimmen; dazu gilt als Ansatz:

$$\frac{x}{(1+x^2)(1+px)} = \frac{Ax+B}{1+x^2} + \frac{C}{1+px}$$

mit zu bestimmenden Koeffizienten A, B, C. Es folgt:

$$\frac{x}{(1+x^2)(1+px)} = \frac{Ax+B}{1+x^2} + \frac{C}{1+px} \quad | \cdot (1+x^2)(1+px)$$

$$x = (Ax+B)(1+px) + C(1+x^2)$$

mit:

$$\underline{x=0}: 0 = B + C$$

$$\underline{x=1}: 1 = A(1+p) + B(1+p) + 2C$$

$$\underline{x=-1/p}: -1/p = C(1+1/p^2),$$

woraus folgt:

$$C(1+1/p^2) = -1/p \Rightarrow C = \frac{-\frac{1}{p}}{1+\frac{1}{p^2}} = -\frac{p}{p^2+1}$$

$$B + C = 0 \Rightarrow B - \frac{p}{p^2+1} = 0 \Rightarrow B = \frac{p}{p^2+1}$$

$$A(1+p) + B(1+p) + 2C = 1 \Rightarrow A(1+p) + (1+p) \frac{p}{p^2+1} - 2 \frac{p}{p^2+1} = 1 \Rightarrow$$

$$A(1+p) + \frac{(p-1)p}{p^2+1} = 1 \Rightarrow A(1+p) = 1 - \frac{(p-1)p}{p^2+1} = \frac{p^2+1}{p^2+1} - \frac{p^2-p}{p^2+1} = \frac{1+p}{p^2+1} \Rightarrow A = \frac{1}{p^2+1}.$$

Die Partialbruchzerlegung führt also auf:

$$h(x) = \frac{x}{(1+x^2)(1+px)} = \frac{\frac{1}{p^2+1}x + \frac{p}{p^2+1}}{1+x^2} - \frac{\frac{p}{p^2+1}}{1+px} = \frac{1}{p^2+1} \left(\frac{x+p}{1+x^2} - \frac{p}{1+px} \right),$$

so dass die Stammfunktion $H(x)$ lautet:

$$H(x) = \frac{1}{p^2 + 1} \left(\frac{1}{2} \int \frac{2x}{1+x^2} dx + p \int \frac{1}{1+x^2} dx - \int \frac{p}{1+px} dx \right) =$$

$$\frac{1}{p^2 + 1} \left(\frac{1}{2} \ln(1+x^2) + p \cdot \arctan(x) - \ln(1+px) \right).$$

IV. Nun ist:

$$I'(p) = \int_0^1 \frac{x}{(1+x^2)(1+px)} dx = \left[\frac{1}{p^2 + 1} \left(\frac{1}{2} \ln(1+x^2) + p \cdot \arctan(x) - \ln(1+px) \right) \right]_{x=0}^{x=1} =$$

$$\frac{1}{p^2 + 1} \left(\frac{1}{2} \ln(2) + p \cdot \arctan(1) - \ln(1+p) \right) - \frac{1}{p^2 + 1} \left(\frac{1}{2} \ln(1) + p \cdot \arctan(0) - \ln(1) \right) =$$

$$\frac{1}{p^2 + 1} \left(\frac{1}{2} \ln(2) + p \cdot \frac{\pi}{4} - \ln(1+p) \right) = \frac{\ln(2)}{2} \cdot \frac{1}{p^2 + 1} - \frac{\ln(1+p)}{p^2 + 1} + \frac{\pi}{4} \cdot \frac{p}{p^2 + 1}.$$

Integration von $I'(p)$ nach p ergibt dann:

$$I(p) = \int \left(\frac{\ln(2)}{2} \cdot \frac{1}{p^2 + 1} - \frac{\ln(1+p)}{p^2 + 1} + \frac{\pi}{4} \cdot \frac{p}{p^2 + 1} \right) dp =$$

$$\int \left(\frac{\ln(2)}{2} \cdot \frac{1}{p^2 + 1} + \frac{\pi}{4} \cdot \frac{p}{p^2 + 1} \right) dp - \int \frac{\ln(1+p)}{p^2 + 1} dp = \int \left(\frac{\ln(2)}{2} \cdot \frac{1}{p^2 + 1} + \frac{\pi}{4} \cdot \frac{p}{p^2 + 1} \right) dp - I(p)$$

$$\Rightarrow 2I(p) = \int \left(\frac{\ln(2)}{2} \cdot \frac{1}{p^2 + 1} + \frac{\pi}{4} \cdot \frac{p}{p^2 + 1} \right) dp$$

$$\Rightarrow I(p) = \frac{1}{2} \int \left(\frac{\ln(2)}{2} \cdot \frac{1}{p^2 + 1} + \frac{\pi}{4} \cdot \frac{p}{p^2 + 1} \right) dp = \frac{\ln(2)}{4} \cdot \arctan(p) + \frac{\pi}{16} \cdot \ln(p^2 + 1) + C.$$

Wegen $I(0) = \int_0^1 \frac{\ln(1)}{1+x^2} dx = \int_0^1 0 dx = 0$ ist:

$$I(0) = \frac{\ln(2)}{4} \cdot \arctan(0) + \frac{\pi}{16} \cdot \ln(0^2 + 1) + C = 0 + 0 + C = 0 \Leftrightarrow C = 0,$$

woraus folgt:

$$I(p) = \frac{\ln(2)}{4} \cdot \arctan(p) + \frac{\pi}{16} \cdot \ln(p^2 + 1).$$

Für $p=p_0=1$ folgt nun:

$$I(1) = \int_0^1 \frac{\ln(1+1 \cdot x)}{1+x^2} dx = \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2} dx = \frac{\ln(2)}{4} \cdot \arctan(1) + \frac{\pi}{16} \cdot \ln(1^2 + 1) = \frac{\ln(2)}{4} \cdot \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{16} \ln(2) =$$

$$\frac{\pi}{16} \ln(2) + \frac{\pi}{16} \ln(2) = \frac{\pi}{8} \ln(2).$$

Damit ist das bestimmte Integral als $\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{8} \ln(2)$ errechnet.